

Приложение к журналу

КВАНТ

№3/96

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

Выпуск 2

Бюро  Квантум

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

Выпуск 2

Под редакцией А.А.Егорова



Москва 1996
Бюро «Квантум»

ББК 22.151.0
П691
УДК 514.112(075.4)

Приложение
к журналу «Квант»
№ 3/96

**П691 Практикум абитуриента: Геометрия, Выпуск 2./Под ред.
А.А.Егорова. — М.: Бюро Квантум, 1996. — 128с. (Прил. к
журналу «Квант» №3/96)
ISBN 5-85843-019-8**

Книга представляет собой сборник статей по планиметрии и стереометрии, опубликованных в разные годы в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента»

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам.

ББК 22.151.0

ISBN 5-85843-019-8

© Бюро Квантум
«Квант». 1996

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
«Ключ» к решению — подобные треугольники. <i>С.Белый</i>	5
Простой ответ в «сложной» задаче. <i>Я.Суконник, П.Горнштейн</i>	11
Числовые средние и геометрия. <i>А.Гольдман, Л.Звавич</i>	19
Теорема Менелая. <i>Б.Орач</i>	24
Можно решить проще! <i>Я.Суконник, П.Горнштейн</i>	29
Геометрические решения экстремальных геометрических задач. <i>П.Горнштейн, В.Полонский, М.Якир</i>	33
Метод решения задач «с конца». <i>Я.Груденов</i>	40
Правильное решение геометрической задачи. <i>Э.Готман</i>	48
Доказательство геометрических неравенств. <i>С.Сефибеков</i>	55
Вооружившись методом координат. <i>И.Габович, П.Горнштейн</i>	60
Скалярное умножение векторов. <i>И.Габович, П.Горнштейн</i>	69
Чертеж в геометрической задаче. <i>Г.Дорофеев, Н.Розов</i>	78
Основные углы в правильной пирамиде. <i>И.Габович</i>	89
Вычисление расстояний и углов. <i>Ю.Ионин, В.Некрасов</i>	95
Из геометрии тетраэдра. <i>В.Матизен, В.Дубровский</i>	106
Теорема о трех синусах. <i>И.Габович</i>	115
Пирамида и сфера. <i>Ю.Сидоров</i>	117
Ответы	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вашему вниманию предлагается очередной выпуск «Практикум абитуриента», содержащий избранные статьи, публиковавшиеся ранее под этой рубрикой в журнале «Квант». Статьи эти посвящены различным вопросам геометрии (планиметрии и стереометрии). Авторы их — известные математики, учителя и преподаватели вузов, методисты, имеющие большой опыт работы со школьниками.

Геометрические задачи, как известно, представляют наибольшие трудности для абитуриентов и участников олимпиад разных уровней. В то же время книг, обучающих основным методам решения таких задач, существует мало. Поэтому, как нам кажется, предлагаемая книга в какой-то мере восполняет имеющийся пробел. Мы надеемся, что она будет полезна не только абитуриентам, но и руководителям кружков, учителям, ведущим факультативные занятия, а также всем любителям порешать на досуге математические задачи.

Любая задача (не только математическая!) кажется нам более или менее трудной лишь до тех пор, пока не удастся найти «ключ» к решению. При решении геометрических задач таким «ключом» часто являются подобные треугольники. В одних задачах подобные треугольники заданы в условии, в других они «замаскированы» и поэтому сразу не бросаются в глаза; встречаются и такие задачи, в которых подобных треугольников вообще нет, чтобы их получить, нужно сделать некоторые дополнительные построения.

Научиться «видеть» подобные треугольники очень полезно — обычно они облегчают решение задачи.

Прежде чем читать решения рассматриваемых ниже задач, постарайтесь каждую из них решить самостоятельно.

Задача 1. *Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, три из которых являются треугольниками. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны r_1 , r_2 , r_3 ; радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен r . Докажите, что*

$$r = r_1 + r_2 + r_3.$$

Решение. Сразу видно, что построенные треугольники подобны треугольнику ABC (см. рис. 1), поэтому

$$\frac{r_1}{r} = \frac{FO}{AC}, \quad \frac{r_2}{r} = \frac{ED}{AC}, \quad \frac{r_3}{r} = \frac{OH}{AC}.$$

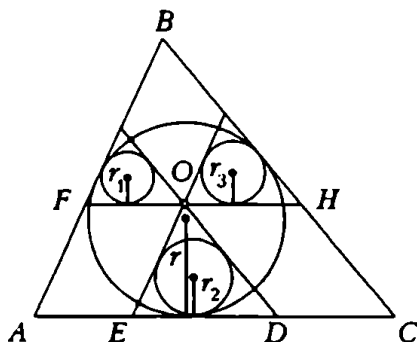


Рис. 1

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{FO + ED + OH}{AC} = \frac{AE + ED + DC}{AC} = 1,$$

откуда $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Задача 2. Докажите, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.

Решение. Из подобия треугольников $AB'B$ и $AC'C$ (рис. 2) следует, что $\frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}$, поэтому и треугольники $AC'B'$ и ABC подобны, так как угол A у них общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Аналогично можно доказать, что подобны треугольники $CA'B'$ и ABC , $BA'C'$ и ABC . Следовательно, $\angle AB'C' = \angle CB'A' = \angle ABC$, откуда $\angle C'B'B = \angle A'B'B$. Аналогично доказывается, что $A'A$ и $C'C$ являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$.

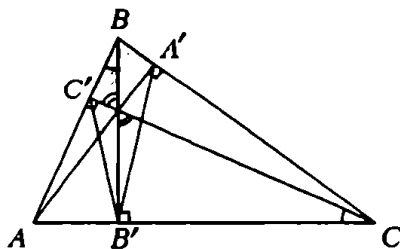


Рис. 2

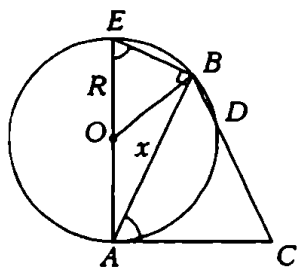


Рис. 3

Задача 3. Окружность с радиусом R проходит через вершину B равнобедренного треугольника ABC , касается основания AC в точке A и пересекает боковую сторону BC в точке D . Найдите длину боковой стороны AB , если $\frac{BD}{DC} = k$.

Решение. Пусть $AB = x$. Заметим, что треугольники ABC и EOB подобны (рис. 3). Действительно, оба они равнобедренные, а углы при основаниях измеряются половиной одной и той же дуги BDA . Поэтому $\frac{x}{R} = \frac{CA}{BE}$. Учитывая, что $BE^2 = 4R^2 - x^2$ по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABE , $CA^2 = CD \cdot CB$ по теореме о касательной и секущей и $x = BC = BD + CD = (k + 1)CD$, получаем уравнение

$$\frac{x^2}{R^2} = \frac{\frac{x}{k+1} \cdot x}{4R^2 - x^2},$$

из которого находим

$$x = R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}.$$

Прямоугольные треугольники подобны, если острый угол одного из них равен острому углу другого. Это часто используется при решении задач.

Задача 4. *Срединный перпендикуляр к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC пересекает катет AC в точке M , а продолжение катета BC — в точке N . Определите AB , если $MP = a$, $MN = b$ (P — середина AB).*

Решение. Пусть $AB = 2x$. Легко видеть, что треугольники AMP и NBP подобны (рис. 4), поэтому $\frac{a}{x} = \frac{x}{a+b}$, откуда $x = \sqrt{a(a+b)}$, $AB = 2\sqrt{a(a+b)}$.

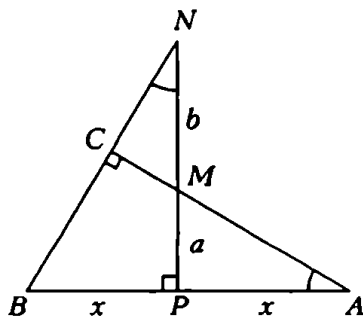


Рис. 4

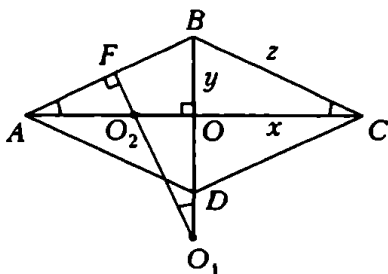


Рис. 5

Задача 5. *Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD , равны соответственно R и r .*

Решение. Прежде всего заметим, что центрами окружностей будут точки O_1 и O_2 пересечения срединного перпендикуляра к стороне AB с диагоналями ромба (рис. 5). Теперь нетрудно видеть, что треугольники AO_2E , O_1BE и ABO (или CBO) подобны. Пусть $AO = x$, $BO = y$ и $AB = z$, тогда

$$\frac{z}{2r} = \frac{x}{z}, \quad \frac{z}{2R} = \frac{y}{z}.$$

Выразив из этих равенств x и y и воспользовавшись теоремой Пифагора, найдем

$$z^2 = \frac{4r^2R^2}{r^2 + R^2}$$

и площадь ромба

$$S = 2xy = \frac{z^4}{2rR} = \frac{8r^3R^3}{(r^2 + R^2)^2}.$$

Задача 6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN , продолжения которых пересекаются в точке O . Определите отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC} = k$ и высота BD меньше основания AC .

Решение. По условию задачи $BD < AC$, т.е. диаметр окружности меньше основания треугольника, поэтому точка O лежит на продолжении BD (почему?) за точку B (рис. 6). Пусть $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{BD^2 + AD^2}}{2AD} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{BD^2}{AD^2} + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}.$$

Далее, треугольники O_1OM и AOD подобны, поэтому $\frac{O_1M}{AD} = \frac{OO_1}{OA}$, т.е.

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2 + 4k^2y^2}}{y + 2ky}, \text{ откуда } \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{k}{k+1}, \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}.$$

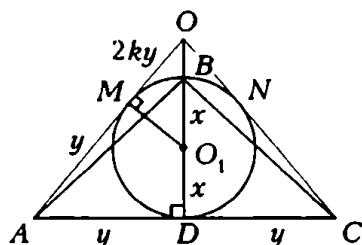


Рис. 6

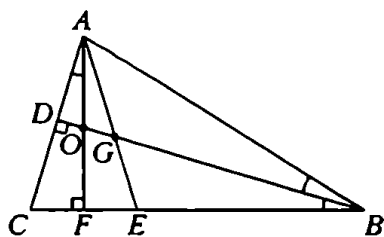


Рис. 7

Задача 7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота AF пересекает высоту BD в точке O , причем $\frac{BO}{OD} = n$. В каком отношении биссектриса AE делит высоту BD ?

Решение. По свойству биссектрисы $\frac{BG}{GD} = \frac{AB}{AD}$, а по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2}$, поэтому $\frac{BG}{GD} = \frac{\sqrt{BD^2 + AD^2}}{AD} = \sqrt{\frac{BD^2}{AD^2} + 1}$ (рис. 7; точка O может лежать и между B и G).

Теперь заметим, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle FAC$, следовательно, треугольники AOD и BAD подобны. Поэтому $\frac{AD}{OD} = \frac{BD}{AD}$, откуда $AD^2 = OD \cdot BD$ и

$$\frac{BG}{GD} = \sqrt{\frac{BD}{OD}} + 1 = \sqrt{\frac{BO + OD}{OD}} + 1 = \sqrt{n+2}.$$

Равные углы (и подобные треугольники) нередко появляются в задачах, в которых есть параллельные прямые. Если же таких прямых нет, то их можно провести.

Задача 8. В трапеции $ABCD$ (AB и CD — основания) $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины A , B и C , касается стороны AD . Найдите диагональ AC .

Решение. Заметим, что $\angle ACD = \angle BAC$ (как накрест лежащие), $\angle ABC = \angle CAD$ (оба они измеряются половиной дуги AEC , рис. 8). Следовательно, треугольники ABC и CAD подобны. Поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC}$, откуда $AC = \sqrt{ab}$.

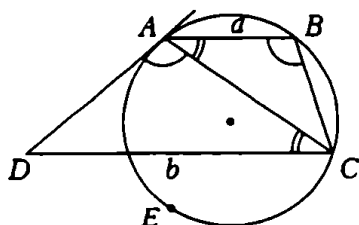


Рис.8

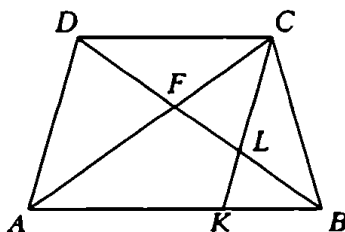


Рис.9

Задача 9. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD , пересекающиеся в точке F . Из вершины C проведена прямая CK , параллельная боковой стороне AD , которая пересекает AB в точке K и BD в точке L так, что $DF = BL$. Найдите отношение $AB:CD$.

Решение. Обозначим искомое отношение через x . Тогда из подобия треугольников AFB и CFD (рис. 9) получим

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CF} = \frac{FB}{DF} = \frac{FL + LB}{DF} = \frac{FL + DF}{DF},$$

откуда $\frac{FL}{DF} = x - 1$. С другой стороны, из подобия треугольников ADF и CLF

$$\frac{FL}{DF} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{x}.$$

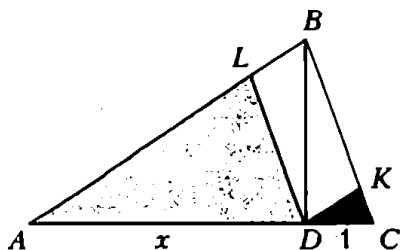


Рис. 10

Следовательно, для определения x получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (поскольку $x > 0$).

Задача 10. В треугольнике ABC через основание D высоты BD проведена прямая параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC в точке K . Найдите отношение $BK:KC$, если площадь треугольника BDK составляет $\frac{3}{16}$ площади треугольника ABC .

Решение. Обозначим искомое отношение через x . Проведем $DL \parallel BC$ (рис. 10) и заметим, что $x = \frac{BK}{KC} = \frac{AD}{DC}$. Далее решаем задачу, пользуясь подобием треугольников ABC , ALD и DKC : с одной стороны, $S_{\triangle ALD} + S_{\triangle DKC} = S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle BDK} = \frac{5}{8}S_{\triangle ABC}$, а с другой $S_{\triangle ALD} + S_{\triangle DKC} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$, откуда получаем

уравнение $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{5}{8}$, или $3x^2 - 10x + 3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Подумайте над такими вопросами: *какова геометрическая интерпретация двух полученных ответов и какую роль играет условие « BD — высота»?*

Упражнения

1. Через некоторую точку внутри треугольника проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1 , S_2 , S_3 . Найдите площадь данного треугольника.

2. В треугольник ABC вписана окружность радиусом r . К этой окружности проведены три касательные, соответственно параллельные сторонам треугольника ABC . В образовавшиеся при этом три новых треугольника вписаны окружности радиусами r_1 , r_2 , r_3 . Докажите, что $r = r_1 + r_2 + r_3$.

3. Из произвольной точки D , взятой на основании AB треугольника ABC , проведены две прямые, параллельные сторонам BC и AC , пересекающие их соответственно в точках F и K . Найдите сумму длин окружностей, описанных около треугольников ADK и DBF , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 2.

4. В треугольнике ABC сторона AC равна b , сторона AB равна c , а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найдите длину стороны BC .

Я.Суконник, П.Горнштейн

В этой статье вновь поднимается вопрос о том, как следует решать планиметрические задачи — «алгебраически» или же «чисто геометрически»? Конечно же, было бы неразумно противопоставлять эти два метода, главная задача при подготовке к вступительным экзаменам — научиться их сочетать. Поиски «чисто геометрического» решения целесообразны далеко не всегда — только если оно приходит в голову достаточно быстро. Мы лишь хотим предостеречь будущего абитуриента от головомных вычислений в сравнительно простой геометрической задаче, легко решаемой с помощью «чисто геометрической» идеи. Задачи, рассматриваемые в этой заметке, допускают разные, иногда очень громоздкие решения, хотя ответы всегда получаются простые. На их примерах можно легко убедиться, насколько важно уметь «геометрически» мыслить и применять в общем-то хорошо всем известные теоремы планиметрии. Конечно, чтобы найти простое геометрическое решение, нужно проявить изобретательность. Умение «решить задачу красиво» — это искусство, овладеть которым можно, лишь постоянно развивая свое геометрическое мышление и интуицию. А для этого — решайте как можно больше задач, и помните, что поиск решения — процесс творческий.

Начнем с таких двух задач.

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен α . На отрезках гипотенузы, образуемых основанием опущенной на нее высоты, как на диаметрах, построены полуокружности, расположенные от гипотенузы по одну сторону с данным треугольником. Найдите отношение длин отрезков катетов, заключенных внутри этих полуокружностей.*

Первое решение. Пусть CAB — данный треугольник (угол A — прямой), AD — его высота, точки E и F — точки пересечения

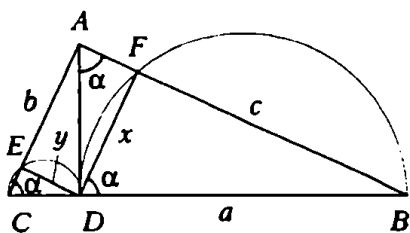


Рис. 1

полуокружностей с катетами AC и AB (см. рис. 1). Очевидно, что $DE \perp AC$ и $DF \perp AB$. Поэтому

$$\begin{cases} DF^2 = AF \cdot FB, \\ DE^2 = AE \cdot EC. \end{cases}$$

Введем неизвестные: $x = DF = AE$ и $y = AF = DE$. Тогда, обозначив $AC = b$ и $AB = c$, получим систему:

$$\begin{cases} x^2 = y(c - y), \\ y^2 = x(b - x), \end{cases}$$

откуда

$$x = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}, \quad y = \frac{b^2c}{b^2 + c^2}.$$

Но

$$FB = c - y = \frac{c^3}{b^2 + c^2}, \quad EC = b - x = \frac{b^3}{b^2 + c^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{FB}{EC} = \frac{c^3}{b^3}.$$

Но $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, значит, $\frac{FB}{EC} = \operatorname{tg}^3 \alpha$.

Второе решение. Заметим, что

$$\angle DCE = \angle DAF = \angle BDF = \alpha.$$

Поэтому

$$\frac{FB}{EC} = \frac{DF \cdot \operatorname{tg} \alpha}{EC} = \frac{(AF \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{EC} = \frac{DE \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{EC} = \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

Мы видим, что для получения ответа вовсе не нужно вводить никаких неизвестных и составлять алгебраические системы, — достаточно лишь заметить, что перечисленные три угла равны.

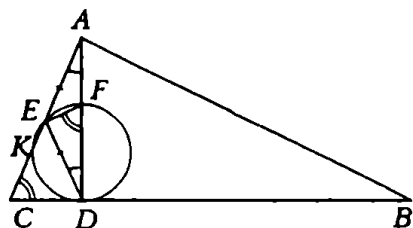


Рис. 2

Задача 2. Дан треугольник ABC . Проведена окружность, касающаяся стороны BC в основании проведенной к ней высоты AD длиной h и проходящая через середину стороны AC длиной b . Найдите диаметр этой окружности.

Первое решение. На рисунке 2 показано одно из возможных расположений: диаметр DF окружности меньше высоты, окружность пересекает сторону AC в двух точках K и E , из которых верхняя точка E является серединой, и не пересекает второй стороны треугольника.

Обозначим диаметр искомой окружности через x : $DF = x$, а длину хорды KE — через y : $KE = y$. Применяя теоремы о касательной и секущей, а также о двух секущих, проведенных к окружности из одной точки (C и A соответственно), получаем

$$CD^2 = CK \cdot CE, \quad AF \cdot AD = AE \cdot AK.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} b^2 - h^2 = \frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right), \\ h(h - x) = \frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + y \right). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно x , находим $DF = x = \frac{b^2}{2h}$.

Однако это решение нельзя считать исчерпывающим — ведь остались неразобранными другие возможные положения окружности (например, когда $DF > AD$, и вторая точка пересечения находится на продолжении стороны AC). Разбор каждого из этих случаев приводит к разным системам и, более того, требует использования разных теорем (в случае $DF > AD$ понадобится теорема о двух пересекающихся хордах).

Сейчас мы приведем другое, геометрическое решение этой задачи; убедитесь сами, что оно уже не зависит от того, как окружность пересекает стороны данного треугольника.

Второе решение. Соединим точку E с точками D и F . Поскольку DE — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника CAD , имеем: $DE = AE = \frac{b}{2}$, и $\angle EDF = \angle EAD$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, прямоугольные треугольники DEF и ADC подобны. Отсюда

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AD},$$

или

$$DF = \frac{AC \cdot DE}{AD},$$

т.е.

$$DF = \frac{b^2}{2h}.$$

Часто решение геометрических задач алгебраическим методом приводит к сложным иррациональным уравнениям. Иногда благодаря дополнительным соображениям этого удается избежать. Вот две типичные задачи.

Задача 3. Определите высоту трапеции, если длины ее оснований равны 6 и 11, длина одной из боковых сторон равна 4, а сумма углов при нижнем основании равна $\frac{\pi}{2}$.

Первое решение. Проведем в трапеции $ABCD$ высоты BE и CF (рис. 3) и положим $BE = CF = x$. Будем считать, что $AB = 4$. Из прямоугольного треугольника AEB находим $AE = \sqrt{16 - x^2}$. Поэтому

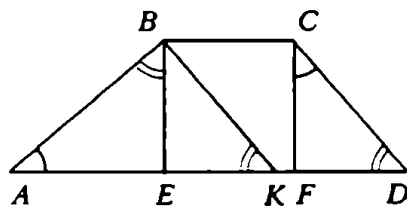


Рис.3

$$FD = AD - (AE + EF) = \\ = (AD - BC) - AE = 5 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Поскольку сумма углов при основании AD равна $\frac{\pi}{2}$, прямоугольные треугольники AEB и CFD подобны; следовательно,

$$\frac{BE}{FD} = \frac{AE}{CF}.$$

Получаем иррациональное уравнение

$$\frac{x}{5 - \sqrt{16 - x^2}} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x},$$

из которого находим высоту трапеции:

$$x = BE = 2,4.$$

Второе решение. Сделаем дополнительное построение: проведем BK параллельно CD . Получим (см. рис. 3 и условие задачи) прямоугольный треугольник ABK , из которого легко находится высота трапеции:

$$BE = \frac{AB \cdot BK}{AK} = \frac{AB \cdot \sqrt{AK^2 - AB^2}}{AK} = \\ = \frac{AB \cdot \sqrt{(AD - BC)^2 - AB^2}}{AD - BC} = \frac{4 \cdot \sqrt{(11 - 6)^2 - 16}}{11 - 6} = 2,4.$$

Задача 4. На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной 3 взяты две точки M и N так, что длина ломаной MDN равна

стороне квадрата. Прямые AM и BN пересекаются в точке E . Найдите длину отрезка ME , если $NE = 4$.

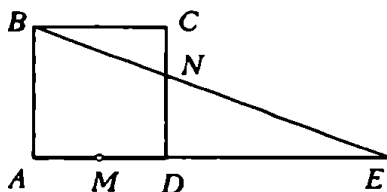


Рис.4

Первое решение. Обозначим длину отрезка DN (рис. 4) через x . Тогда $DE = \sqrt{16 - x^2}$. Из подобия треугольников NDE и BAE имеем

$$\frac{DN}{AB} = \frac{DE}{AE}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{3 + \sqrt{16 - x^2}}.$$

Это иррациональное уравнение сводится к такому уравнению четвертой степени:

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 96x - 144 = 0.$$

Многочлен, получившийся в левой части, раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов: $x^2 + 2x - 6$ и $x^2 - 8x + 24$. Поэтому

$$(x^2 + 2x - 6)(x^2 - 8x + 24) = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень:

$$x = DN = \sqrt{7} - 1.$$

Теперь мы легко находим

$$\begin{aligned} ME &= MD + DE = 3 - DN + \sqrt{16 - DN^2} = \\ &= 3 - \sqrt{7} + 1 + \sqrt{16 - (\sqrt{7} - 1)^2} = 4 - \sqrt{7} + \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} = 5. \end{aligned}$$

Простой ответ наводит на мысль, что существует другое, менее сложное решение. Вот оно.

Второе решение. Поскольку треугольники BCN и NDE подобны, то

$$\frac{BC}{CN} = \frac{DE}{DN}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{3 - DN} = \frac{DE}{DN},$$

т.е.

$$3(DE - DN) - DN \cdot DE = 0.$$

Приняв во внимание, что $MD = 3 - DN$, и $DN^2 + DE^2 = 16$, получим

$$ME = MD + DE = (3 - DN) + DE = \sqrt{(3 - DN + DE)^2} = \sqrt{9 + 16 + 2 \cdot 0} = 5.$$

Проявив изобретательность, мы смогли обойтись без иррационального уравнения, решать которое, согласитесь, было не так-то уж и приятно!

Одним из самых распространенных среди абитуриентов методов решения планиметрических задач является применение тригонометрии. Безусловно, это очень важный и полезный метод, — порой введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению. Однако в каждом конкретном случае следует подумать, нет ли более простого, геометрического решения. Вот показательный пример.

Задача 5. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB , а угол при вершине A равен α . На стороне AC взята точка R , так что $AB = RC$. Пусть E — середина отрезка AR , D — середина стороны BC . Найдите угол CED .

Первое решение (тригонометрическое). Обозначим длины сторон треугольника ABC буквами a, b, c , величины его углов — буквами A, B, C соответственно, а величину искомого угла CED — буквой x .

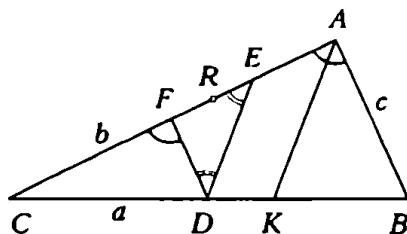


Рис.5

Тогда (см. рис. 5):

$$\angle CDE = 180^\circ - (C + x), \quad CD = \frac{a}{2},$$

$$CE = CR + RE = c + \frac{b - c}{2} = \frac{b + c}{2}.$$

По теореме синусов находим из треугольника CDE :

$$\frac{CE}{\sin \angle CDE} = \frac{CD}{\sin \angle CED},$$

т.е.

$$\frac{b+c}{\sin(C+x)} = \frac{a}{\sin x}; \quad (1)$$

из треугольника ABC :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

т.е.

$$\frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A}. \quad (2)$$

Деля соотношение (1) на соотношение (2), получаем

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin(C+x)} = \frac{\sin A}{\sin x},$$

или, поскольку $B = 180^\circ - (A + C)$,

$$\frac{\sin(A+C) + \sin C}{\sin A} = \frac{\sin(C+x)}{\sin x},$$

т.е.

$$\frac{2\sin\left(\frac{A}{2} + C\right)\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin(C+x)}{\sin x},$$

откуда

$$x = \frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Второе решение (геометрическое). Мы сейчас приведем даже два геометрических решения.

1. Проведем в треугольнике ABC среднюю линию DF . Имеем

$$FE = CE - CF = \frac{b+c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = DF,$$

т.е. треугольник DFE — равнобедренный. Поэтому

$$\angle CED = \frac{1}{2}\angle CFD = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{\alpha}{2}.$$

2. Проведем биссектрису AK угла A треугольника ABC . Тогда $\frac{CK}{CA} = \frac{a}{b+c}$. Но и $\frac{CD}{CE} = \frac{a}{b+c}$, значит, треугольники CDE и CKA подобны, и отрезок DE параллелен AK . Следовательно, $\angle CED = \angle CAK = \frac{\alpha}{2}$.

Не правда ли, «тригонометрическое» решение этой задачи нельзя назвать удачным? Оба геометрических решения, безусловно, более изящны. Но в некотором смысле они и более трудны — ведь нужно было *догадаться* сделать дополнительные построения — провести среднюю линию DF в первом случае и биссектрису AK — во втором.

Упражнения

1. В прямоугольнике $ABCD$ дано: $AB = a$, $AD = b$ ($a > b$). Найдите на стороне AB точку E , для которой $\angle CED = \angle AED$.

2. В плоском выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E , F , K , L являются серединами сторон AB , BC , CD , DA . Отрезками EK и FL данный четырехугольник разделен на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что сумма площадей тех из этих четырехугольников, которые имеют вершины в точках A и C , равна сумме площадей двух других четырехугольников.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна к основанию AD , $BC = a$, $AD = b$, $a < b$. На основании AD существует такая точка M , что прямая MB перпендикулярна к AC , а MC перпендикулярна к BD . Найдите высоту трапеции.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины A , B и C , касается отрезка AD . Найдите длину диагонали AC .

5. Две окружности с радиусами R и r ($R > r$) имеют внешнее касание в точке A . Через точку B , взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C . Найдите длину отрезка BC , если длина хорды AB равна a .

6. В равнобокой трапеции $ABCD$ угол при основании AD равен $\arcsin \frac{24}{25}$. Окружность с радиусом R касается основания AD , боковой стороны AB и проходит через вершину C ; она отсекает на сторонах BC и CD равные отрезки MC и NC соответственно. Найдите длину отрезка BM .

7. В круге проведены два диаметра AB и CD , M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$ и $CM = 24$. Чему равно DM ?

8. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Угол CAB равен α . Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K . На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите угол AMK .

По-видимому, вам не раз приходилось встречаться с такими понятиями, как среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое \sqrt{ab} двух положительных чисел. Возможно, вы сталкивались и с другими средними величинами: средним гармоническим $\frac{2ab}{a+b}$ и средним квадратичным $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ двух положительных чисел. Так, средняя скорость туриста, прошедшего некоторое расстояние со скоростью V_1 , а обратный путь со скоростью V_2 , оказывается равной среднему гармоническому скоростей V_1 и V_2 , т.е. $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ (убедитесь в этом).

Широко известно и часто используется при решении задач неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Оказывается, что для любых положительных a и b выполняются неравенства:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad (*)$$

причем все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a = b$. Каждое из неравенств можно доказать, используя свойства числовых неравенств (проделайте это самостоятельно!).

Определения средних величин естественным образом распространяются и на случай n положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n :

$$H(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad \text{— среднее гармоническое,}$$

$$G(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{— среднее геометрическое,}$$

$$A(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \text{— среднее арифметическое,}$$

$$Q(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad \text{— среднее квадратичное.}$$

В общем случае справедливы неравенства $H \leq G \leq A \leq Q$, однако доказываются они значительно сложнее. Неравенства же, относящиеся к средним величинам двух положительных чисел, мы докажем геометрически. Одно из доказательств неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ основано на том, что высота прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу (рис. 1).

Однако с помощью конфигурации рисунка 1 не ясно, как сравнить среднее геометрическое со средним гармоническим, а среднее арифметическое со средним квадратическим. В то же

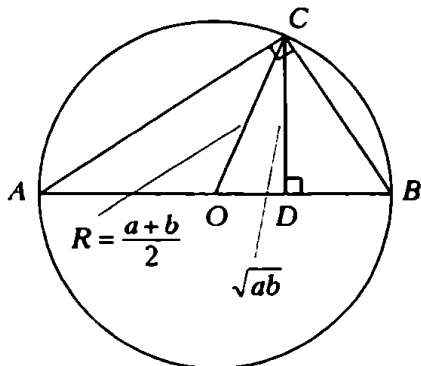


Рис.1

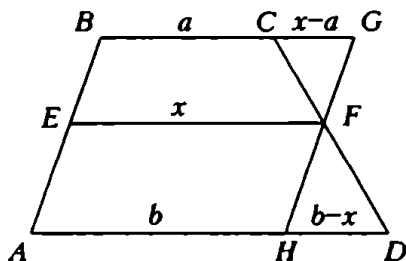


Рис.2

время существует фигура, в которой все средние двух чисел a и b можно увидеть «живьем» — это трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$, $AD = b$ (для определенности будем считать, что $b > a$). Среднее арифметическое — это длина средней линии трапеции. Остальные средние вы увидите, решив следующие упражнения: первое из них — полезная лемма, помогающая справиться с остальными.

Упражнения. Пусть EF — отрезок длиной x с концами соответственно на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, параллельный ее основаниям (рис. 2).

1. Найдите x , если известно, что $BE/EA = \lambda$. (Ответ: $x = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$).
Указание. См. на рисунке 2: $GH \parallel AB$, а треугольники $F CG$ и $F DH$ подобны.

2. Найдите x , если отрезок EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

(Ответ: $x = \frac{2ab}{a+b}$). Указание. Воспользуйтесь упражнением 1 и тем, что $BE/ED = a/b$.

3. Найдите x , если трапеции $AEFD$ и $EBCF$ подобны. (Ответ: $x = \sqrt{ab}$).

4. Найдите x , если трапеции $AEFD$ и $EBCF$ равновелики. (Ответ: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$). Указание. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P (рис.3). Тогда $\frac{S_2}{S_1 + S_2} = \frac{a^2}{x^2}$; $\frac{S_2 + 2S_1}{S_2 + S_1} = \frac{b^2}{x^2}$. Сложив эти равенства, получим ответ.

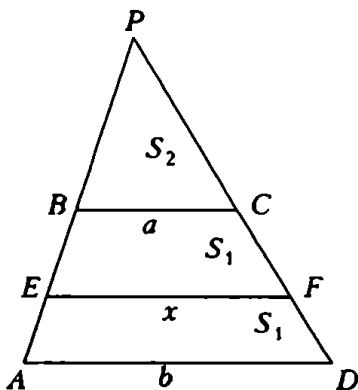


Рис.3

Итак, в трапеции $ABCD$ появились все упомянутые нами средние чисел a и b . Осталось доказать неравенства (*).

Упражнения

5. Докажите, что

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Указание. Пусть EF , MN и KL соответствующие отрезки (постройте чертеж).

Тогда $\frac{BE}{EA} = \frac{a}{b}$; $\frac{BM}{MA} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{BK}{KA} = 1$, но $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} < 1$.

6. Докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Указание. Если KL — средняя линия трапеции, то $S_{BCLK} < S_{AKLD}$.

Итак, мы доказали неравенства (*) и убедились в том, что при $a < b$ все неравенства — строгие. Нетрудно видеть, что если какие-либо два из отрезков, длины которых мы сравнивали, равны, то $ABCD$ — параллелограмм и, следовательно, все неравенства (*) превращаются в равенства.

Приведем еще один способ сравнения средних. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$, причем $a > b$. Пусть σ_M — сумма расстояний от некоторой точки M , лежащей на гипотенузе AB , до катетов треугольника.

Упражнение 7. Докажите, что $\sigma_N > \sigma_M$, если и только если точка N лежит «выше» точки M (рис. 4).

Указание. $\sigma_M = KN_1 + KM_2 + KM$, $\sigma_N = N_2N + NK + KN_1 = KN_1 + KM_2 + KN$, но $KN > KM$.

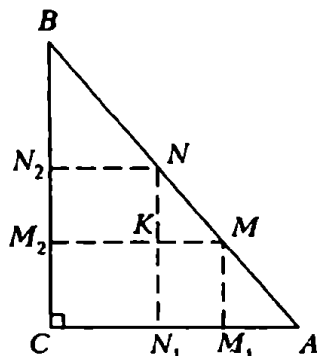


Рис. 4

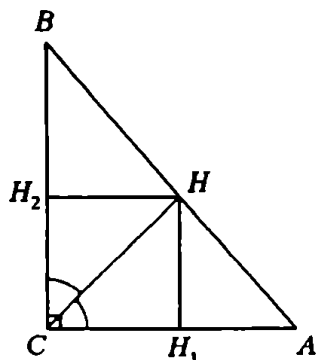


Рис. 5

Пусть биссектриса угла C пересекает гипотенузу в точке H (рис. 5). Тогда четырехугольник CH_2HH_1 — квадрат со стороной $\frac{ab}{a+b}$, так что $\sigma_H = \frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел a и b , причем $BH/AH = b/a$. Если O — середина гипотенузы, то $\sigma_O = \frac{a+b}{2}$, а точка O лежит выше точки H ($\frac{b}{a} < 1$). Поэтому $\sigma_O = \sigma_H$, т.е. $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$.

Упражнения

8. Рассмотрим на гипотенузе AB точку G , для которой $\sigma_G = \sqrt{ab}$. Докажите, что точка G лежит между точками O и H , т.е. что $\sigma_O > \sigma_G > \sigma_H$.

9. Пусть P — точка на биссектрисе угла C (рис. 6), для которой $CP = \frac{1}{2}AB = CO = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Пусть также точка Q на AB такова, что прямая QP перпендикулярна CP . Докажите, что $\sigma_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, после чего убедитесь в справедливости неравенства $\sigma_Q > \sigma_O$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $PP_2 = PP_1$, а $\angle QPP_2 = 45^\circ$ (см. рис. 6).

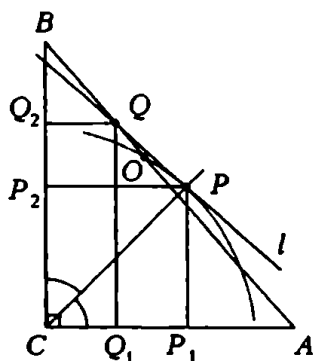


Рис. 6

Существует и третье доказательство неравенств о средних, провести которое мы предлагаем вам в качестве очень полезных упражнений.

Упражнения

10. Окружности диаметрами a и b касаются внешне. Докажите, что отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками касания, равен среднему геометрическому диаметров.

11. Окружности диаметрами a и b не имеют общих точек, а отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками касания, равен среднему арифметическому диаметров. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно среднему квадратическому диаметров.

Из упражнения 10 следует неравенство $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, из упражнения 11 — неравенство $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Подумайте, как с помощью данной конфигурации доказать неравенство о средних гармоническом и геометрическом. (*Подсказка.* В конфигурации упражнения 10 найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной и воспользуйтесь тем, что треугольник с вершинами в трех точках касания — прямоугольный.)

Б. Орач

Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

Пусть $\triangle ABC$ пересечен прямой, не параллельной стороне AB и пересекающей две его стороны AC и BC соответственно в точках B_1 и A_1 , а прямую AB в точке C_1 (рис. 1), тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

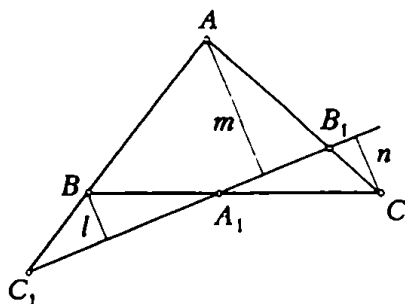


Рис. 1

(Чтобы не запутаться, в каком порядке идут буквы в формуле, придерживайтесь следующего правила: двигайтесь по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.)

Доказательство. Из вершин треугольника проведем параллельные друг другу отрезки до пересечения с секущей прямой. Образуются три пары подобных треугольников. Из подобия получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{m}{n}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{n}{l}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{l}{m}.$$

Осталось перемножить полученные пропорции:

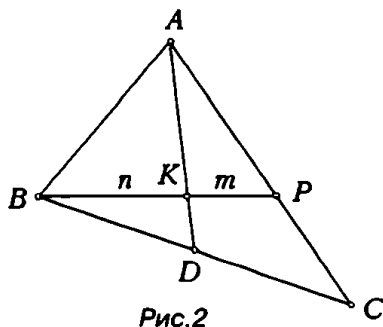
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{m \cdot n \cdot l}{n \cdot l \cdot m} = 1.$$

Теорема доказана.

Эта теорема дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского (I в. н.э.).

Чтобы продемонстрировать ее эффективность, рассмотрим решение одной задачи двумя способами: векторным и с помощью теоремы Менелая.

Задача 1. Пусть AD — медиана $\triangle ABC$ (рис. 2). На AD взята точка K так, что $AK : KD = 3 : 1$. В каком отношении прямая BK делит площадь $\triangle ABC$?



Очевидно, отношение площадей треугольников ABP и CBP равно отношению отрезков AP и PC . Итак, решение задачи сводится к нахождению отношения AP/PC .

Векторное решение. Вектор \vec{AK} выразим двумя способами через векторы \vec{AB} и \vec{AC} . Прежде всего, $\vec{AK} = \frac{3}{4}\vec{AD}$. Но $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ (формула середины отрезка). Значит,

$$\vec{AK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{3}{8}\vec{AC}. \quad (1)$$

Обозначим $\frac{PK}{KB} = \frac{m}{n}$, $\vec{AP} = x \cdot \vec{AC}$. Применяя к BP теорему о делении отрезка в данном отношении, имеем

$$\vec{AK} = \frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AP}.$$

Но $\vec{AP} = x \cdot \vec{AC}$, значит,

$$\vec{AK} = \frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{nx}{m+n}\vec{AC}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$\frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{nx}{m+n}\vec{AC} = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{3}{8}\vec{AC}.$$

Используя однозначность разложения вектора \vec{AK} по двум неколлинеарным векторам \vec{AB} и \vec{AC} , получаем систему

$$\begin{cases} \frac{m}{m+n} = \frac{3}{8}, \\ \frac{n}{m+n} = \frac{3}{8x}, \end{cases}$$

откуда $x = 3/5$, т.е. $AP/AC = 3/5$, и

$$\frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$

Решение с помощью теоремы Менелая. Применяя эту теорему к треугольнику ACD и секущей прямой BP , имеем

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{AK} = 1, \quad \frac{AP}{PC} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 1, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$

Преимущество применения теоремы Менелая очевидно.

Очень часто при решении задач нужна не сама теорема Менелая, а теорема, обратная к ней.

Рассмотрим треугольник ABC . Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, AC, AB соответственно, т.е. лежат на сторонах треугольника или их продолжениях (рис.3). Если $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{CA} = 1$, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

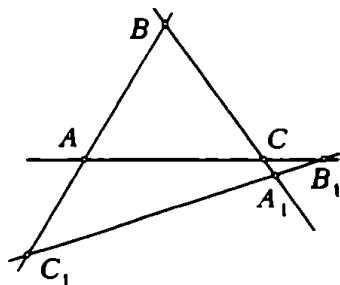


Рис.3

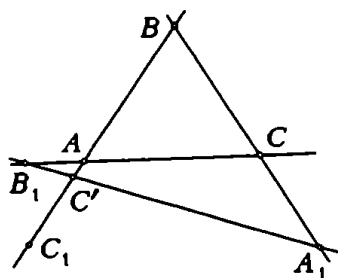


Рис.4

Доказательство. Предположим противное, т.е. что точка C_1 не лежит на прямой A_1B_1 (рис.4). Пусть C' — точка пересечения прямых A_1B_1 и AB . Тогда, согласно прямой теореме Менелая, $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$. Но очевидно, что $\left| \frac{BC_1}{C_1A} \right| \neq \left| \frac{BC'}{C'A} \right|$. Поэтому соотношение в условии теоремы не может быть выполнено. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

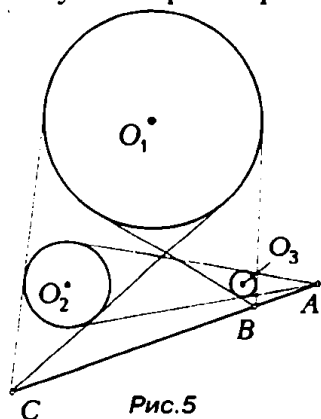


Рис.5

Следующая красивая задача, вероятно, так же как и теорема Менелая, известна с глубокой древности. Она не раз использовалась на олимпиадах, а в отдельных случаях — и на вступительных экзаменах...

Задача 2. Три окружности разных радиусов расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Каждой паре окружностей сопоставим точку пересечения внешних двой-

ных касательных. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой (рис.5).

Решение. Пусть радиусы окружностей с центрами O_1, O_2, O_3 равны r_1, r_2, r_3 соответственно. Тогда $\left| \frac{O_1C}{CO_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}$, так как окружности с центрами O_1 и O_2 гомотетичны относительно точки C , а отношение радиусов $\left| \frac{r_1}{r_2} \right|$ — коэффициент гомотетии. Аналогично, $\frac{O_2A}{AO_3} = \frac{r_2}{r_3}$; $\frac{O_3B}{BO_1} = \frac{r_3}{r_1}$. Таким образом, $\frac{O_1C}{CO_2} \cdot \frac{O_2A}{AO_3} \cdot \frac{O_3B}{BO_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1$. По теореме, обратной к теореме Менелая, точки A, B, C принадлежат одной прямой.

Упражнения

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC даны соответственно точки M и N такие, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$. В каком отношении точка S пересечения отрезков BN и CM делит каждый из этих отрезков?

2. Точка D на стороне BC треугольника ABC делит эту сторону в отношении $2:1$, считая от вершины B . В каком отношении медиана CE делит AD ?

3. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D , а на стороне BC точки E и F так, что $AD : DB = 3 : 2$, $BE : EC = 1 : 3$ и $BF : FC = 4 : 1$. В каком отношении прямая AE делит отрезок DF ?

4. Ортоцентр H треугольника ABC делит высоту пополам. Докажите, что $\cos \angle C = \cos \angle A \cdot \cos \angle B$, где $\angle A, \angle B, \angle C$ — углы при вершинах.

5. В правильном треугольнике ABC со стороной a точка E — середина BC , D — середина AC , $F \in DC$, $BF \cap DE = M$, $S_{ABMD} = \frac{5}{8} S_{ABC}$. Найдите MF (рис. 6).

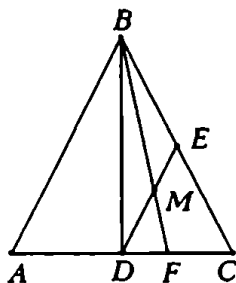


Рис.6

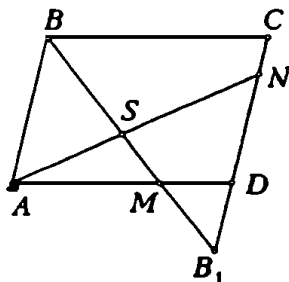


Рис.7

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит отрезок AD в отношении p , а точка N делит отрезок DC в отношении q . Прямые BM и AN пересекаются в точке S . Вычислите отношение $AS : SN$ (рис.7).

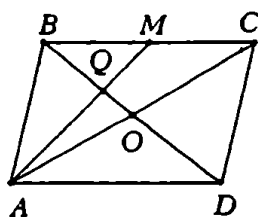


Рис.8

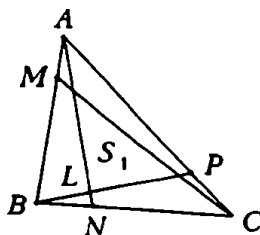


Рис.9

7. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1 , и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $QMCD$ (рис.8).

8. Стороны $\triangle ABC$ разделены точками M , N и P так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN , BP и CM , к площади треугольника ABC (рис.9).

Я.Суконник, П.Горнштейн

Тот, кто готовится к вступительным экзаменам по математике, не раз встречался, вероятно, с трудными экзаменационными задачами, решение которых требует долгих рассуждений и длинных вычислений. И каждого, конечно, занимал вопрос: а нельзя ли для такой задачи придумать простое, рациональное и короткое решение?

Довольно часто — можно. Но додуматься до такого решения не просто — нужен долгий и упорный поиск. Зато каждое красивое решение трудной задачи всегда вызывает чувство удовлетворения, свидетельствует о глубоких знаниях и творческих способностях абитуриента. Именно поэтому при подготовке к экзаменам пытаться отыскивать или, в крайнем случае, разбирать такие решения особенно полезно.

Тем более досадно, что в книгах для абитуриентов иногда приводятся неоправданно громоздкие и нерациональные решения.

Возьмем к примеру книгу Ю.В.Нестеренко, С.Н.Олехника и М.К.Потапова «Задачи вступительных экзаменов по математике» (М., «Наука», 1980), где воспроизведены варианты по математике, предлагавшиеся в 1977—1979 гг. поступавшим в Московский университет, и указываются решения части вариантов. Решения некоторых задач занимают в этой книге одну, две, даже три страницы. Между тем, зачастую их можно решить много проще и короче.

В настоящей статье приведены четыре задачи из указанной книги с более простыми решениями.

Свойства фигур. При решении геометрических задач абитуриенты часто, не особенно размышляя, затевают длинные и громоздкие вычисления, которые, впрочем, обычно и приводят к цели. Между тем, такие задачи иногда удается решить очень

быстро, если догадаться применить некую теорему, суметь воспользоваться спецификой конфигурации, увидеть нужное дополнительное построение. В геометрии мы тем успешнее будем продвигаться вперед, чем шире будет наш «геометрический кругозор», чем лучше мы научимся видеть свойства фигур, которые можно «обыграть» в решении.

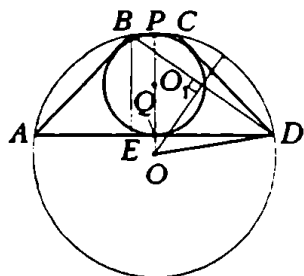


Рис. 1

Задача 1. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите углы трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 1). Проведем диагональ BD и высоту BE . Обозначим $\angle DAB$ через x , $\angle ADB$ — через y . Опустив перпендикуляр из центра O описанной окружности (обозначим ее радиус через R) на BD и продолжив его до пересечения с этой окружностью, можно увидеть, что

$$BD = 2R \cdot \sin x. \quad (1)$$

Из $\triangle DBE$

$$BE = BD \cdot \sin y.$$

Из (1) и (2)

$$BE = 2R \cdot \sin x \cdot \sin y, \quad (2)$$

т.е. высота треугольника равна диаметру описанной окружности, умноженному на произведение синусов углов, прилежащих к стороне, к которой проведена высота. Таким образом,

$$\frac{BE}{R} = 2 \sin x \cdot \sin y = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Проведем высоту трапеции PQ через центр O_1 вписанной окружности (PQ пройдет и через O , но это нам не понадобится). Тогда $ED = EQ + QD = BP + QD = PC + QD = CF + FD = CD$, т.е. проекция диагонали описанной равнобедренной трапеции на большее основание равна боковой стороне. Из $\triangle BED$ запишем

$$\operatorname{tg} y = \frac{BE}{ED} = \frac{BE}{CD} = \frac{BE}{AB} = \sin x. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем уравнение

$$2\operatorname{tg} y \cdot \sin y = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 2\cos^2 y + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos y - 2 = 0, \quad \cos y = \frac{-\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.$$

Окончательно $\cos y = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin x = \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle A = \angle D = x = \frac{\pi}{4}$,
 $\angle B = \angle C = \frac{3}{4}\pi$.

Замечание. Решая задачу, мы попутно усмотрели следующее важное усиление теоремы синусов (см. (1)):

$$a = 2R \cdot \sin \angle A,$$

или

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R.$$

Рассмотрев все случаи расположения центра описанной окружности относительно треугольника, его легко доказать.

Задача 2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H . Длина отрезка MH равна 1. Найдите величину угла BAD .

Решение. Поскольку $\angle BAE = \angle DAE = \angle BEA$ (рис. 2), $\triangle ABE$ — равнобедренный. Значит, $BE = BA = 2$ и $MH \parallel AE$. Из подобия треугольников BMH и BAE

$$\frac{BM}{MH} = \frac{BA}{AE}.$$

Так как $BM = BA - MA = BA - AK =$

$$= BA - \frac{1}{2}AE = 2 - \frac{1}{2}AE, \quad \frac{2 - \frac{1}{2}AE}{1} = \frac{2}{AE}. \quad \text{Отсюда } AE = 2, \\ \angle BAE = \frac{\pi}{3}, \quad \angle BAD = \frac{2}{3}\pi.$$

Задача 3. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и DC являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E . Найдите площадь треугольника BCE , если $BA = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$ и $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Из подобия треугольников ECD и EAB (рис. 3)

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{AB}.$$

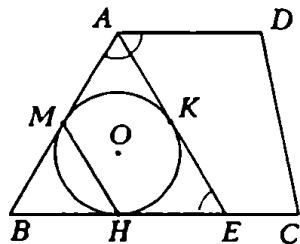


Рис.2

Значит, $\frac{CE}{EA} = \frac{4}{5}$, $\frac{CE}{CA} = \frac{4}{9}$. Так как BK — общая высота треугольников BCE и BCA ,

$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BCA}} = \frac{CE}{CA}.$$

Значит, $S_{\triangle BCE} = \frac{4}{9} S_{\triangle BCA}$. Но $S_{\triangle BCA} = S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin \angle DAB$.

Следовательно, $S_{\triangle BCE} = 10\sqrt{3}$.

Задача 4. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S , является точка O , лежащая внутри треугольника ABC . Расстояние от точки O до стороны

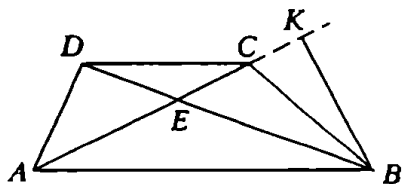


Рис. 3

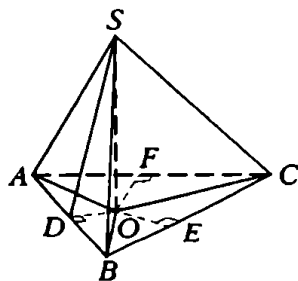


Рис. 4

AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как $2:1$. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Найдите объем пирамиды.

Решение. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB , BC , CA соответственно через D , E , F (рис. 4). Из треугольников OEB и ODB

$$\frac{OE}{OD} = \frac{\sin \angle OBC}{\sin \angle OBA}.$$

Значит, $OE = \frac{1}{2} OD$. Из равенства $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC}$ следует, что $OD + OE + OF = h$, где h — длина высоты треугольника ABC . (Замечание. Это равенство, очевидно, верно для любой точки O внутри равностороннего треугольника.) Поскольку $h = BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2}$ и $OF = 1$, получаем $OD = \frac{1}{3}$. Зная AB и $S_{\triangle SAB}$, находим SD . Затем из $\triangle SOD$ находим SO .

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

П.Горнштейн, В.Полонский, М.Якир

Задачи, связанные с нахождением наибольших и наименьших значений геометрических величин, неспроста пользуются большой популярностью у составителей экзаменационных заданий: ведь чтобы решить подобную задачу, абитуриенту приходится комбинировать приемы и методы из весьма различных разделов школьного курса математики.

Первое, что приходит в голову, — составить с помощью заданных параметров функцию и исследовать ее на максимум и минимум. У такого подхода тем не менее есть недостаток: во многих геометрических задачах этот привычный путь решения сопряжен со значительными техническими трудностями. В условиях экзамена, где так важно не ошибиться, этот недостаток особенно ощутим. Часто, однако, удается избавиться от громоздких выкладок, обойдясь чисто геометрическими рассуждениями. Вот примеры.

Задача 1. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образовавшихся полукругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если $AB = 4$, $AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — середины соответственно отрезков AB и AC (рис. 1). Тогда

$$O_1O_2 = \sqrt{AO_1^2 + AO_2^2 - 2AO_1AO_2 \cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$$

Пусть r — радиус окружности, о которой говорится в условии задачи, O — ее центр.

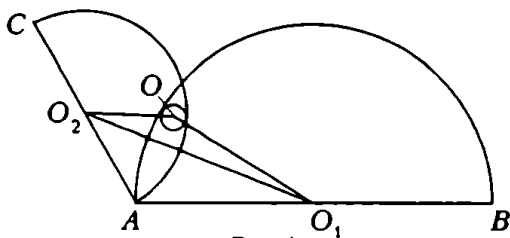


Рис. 1

Для точек O_1, O_2 , Оимеем $O_1O + OO_2 \geq O_1O_2$, или $1 - r + 2 - r \geq \sqrt{7}$. Отсюда $r \leq (3 - \sqrt{7})/2$. Очевидно, знак равенства достигается лишь в том случае, когда точка O принадлежит отрезку O_1O_2 .

Ответ: $(3 - \sqrt{7})/2$.

Задача 2. Найдите периметр треугольника наибольшей площади, образованного большим основанием и продолжениями боковых сторон трапеции, если известно, что длина верхнего основания трапеции в два раза меньше длины ее нижнего основания, а диагонали равны 5 и 6.

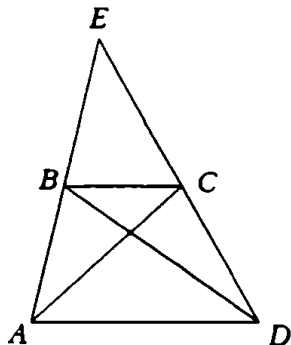


Рис.2

Решение. Пусть BC и AD — основания трапеции (рис. 2), $BC = \frac{1}{2}AD$. Выходит, что BC — средняя линия треугольника AED . Тогда

$$S_{BEC} = \frac{1}{4}S_{AED}, \quad S_{ABCD} = \frac{3}{4}S_{AED}.$$

Следовательно, площадь треугольника AED достигает максимального значения при максимальной площади трапеции $ABCD$. Очевидно, $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}AC \cdot BD$, т.е. площадь данной трапеции максимальна, если ее диагонали перпендикулярны.

Итак, искомый периметр — это периметр треугольника с перпендикулярными медианами:

$$\begin{aligned} P_{AED} &= AE + ED + AD = 2AB + 2CD + AD = \\ &= 2\sqrt{\frac{4}{9}AC^2 + \frac{1}{9}BD^2} + 2\sqrt{\frac{4}{9}BD^2 + \frac{1}{9}AC^2} + \sqrt{\frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{9}BD^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{26 + 4\sqrt{34} + 2\sqrt{61}}{3}$.

Задача 3. В треугольнике ABC биссектриса, проведенная из вершины A , имеет длину 2, а $AB = 2AC$. На стороне AB взята точка M , а на стороне AC — точка N так, что $BM = AN$. Найдите наименьшее возможное расстояние от середины отрезка MN до вершины A .

Решение. Пусть Q — середина отрезка MN , K — точка пересечения биссектрисы угла BAC и BC . Спроектируем точки M, N, Q и B на биссектрису угла BAC (рис. 3). Тогда

$$AN_1 = M_1B_1, \quad N_1E = M_1E$$

(докажите!). Пусть $AC=m$, $AB=2m$, $\angle BAE = \angle EAC = \alpha$. Тогда

$$AE = AN_1 + N_1E = \frac{1}{2} AB_1 = m \cos \alpha.$$

Отсюда $AQ \geq AE = m \cos \alpha$.

Следовательно, искомое расстояние принимает наименьшее значение, когда середина Q отрезка MN лежит на биссектрисе. (Покажите, что положение точек M и N , при котором указанный случай реализуется, действительно существует.)

Для площади треугольника ABC имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 2\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot AK \sin \alpha + \frac{1}{2} AK \cdot AC \sin \alpha,$$

или

$$m^2 \sin^2 2\alpha = m \sin \alpha + 2m \sin \alpha.$$

Отсюда $m \cos \alpha = 1,5$.

Ответ: 1,5.

Задача 4. В параболу $y = ax^2 + bx + c$ вписан четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади с диагоналями AC и BD . Найдите координаты вершины C , если $A(-3; -4)$, $B(-2; -1)$, $D(1; -4)$.

Решение. Так как точки A , B , D лежат на параболе, то их координаты удовлетворяют ее уравнению:

$$\begin{cases} -4 = 9a - 3b + c, \\ -1 = 4a - 2b + c, \\ -4 = a + b + c, \end{cases}$$

откуда $a = -1$, $b = -2$, $c = -1$.

Итак, уравнение заданной параболы найдено: $y = -(x+1)^2$. В условии указано, что AC — диагональ четырехугольника $ABCD$, значит, точка C лежит на дуге BD параболы (рис. 4). Для решения задачи достаточно найти координаты точки C , при которых площадь треугольника DBC максимальна, что, в свою очередь, равносильно поиску на дуге BD точки, максимально удаленной от прямой BD . Пусть l — касательная к параболе, параллельная BD . В силу характера выпуклости квадратичной функции все точки параболы лежат в одной

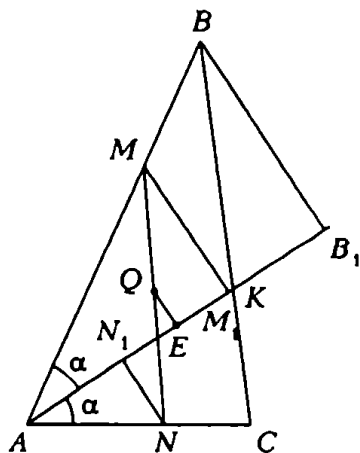


Рис.3

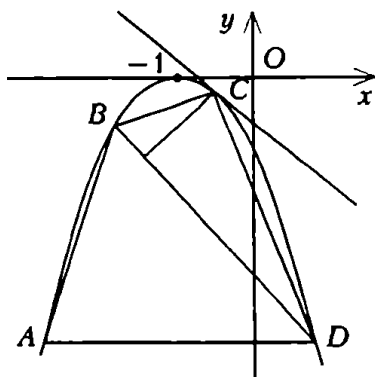


Рис.4

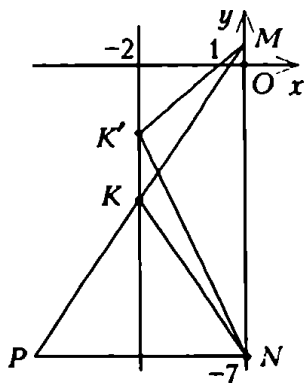


Рис.5

полуплоскости относительно прямой l . Следовательно, точкой, максимально удаленной от прямой BD , будет точка касания.

Так как прямая BD не вертикальная, то ее уравнение имеет вид $y = kx + d$. Зная координаты точек B и D , легко установить, что $k = -1$. Значит, угловой коэффициент касательной l равен -1 , т.е. производная квадратичной функции, задающей параболу, в точке касания равна -1 . Имеем $-2(x_0 + 1) = -1$, где x_0 — абсцисса точки касания; откуда $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Задача 5. К кривой $y = x^2 + bx + 2$ в точках с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ проведены касательные. При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy , будет наименьшим?

Решение. Уравнения касательных к заданной параболы в точках с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ соответственно имеют вид $y = (b - 2)x + 1$, $y = (b - 6)x - 7$ (покажите это!). Отсюда две вершины треугольника, о котором говорится в условии, имеют координаты $M(0; 1)$ и $N(0; -7)$, а третья — $K(-2; 5 - 2b)$ (рис. 5). Следовательно, нужно найти такое положение точки K на прямой $x = -2$, при котором сумма $MK + KN$ была бы наименьшей.*

*Осталось решить «задачу о людоеде». Людоед живет в пещере M , обедает в деревне N и после плотной трапезы заходит по дороге домой напиться к ручью $x = -2$. Какой дорогой он должен идти, чтобы побыстрее добраться до пещеры? В менее кровавой формулировке эта задача неоднократно упоминалась на страницах «Кванта». (Прим. ред.)

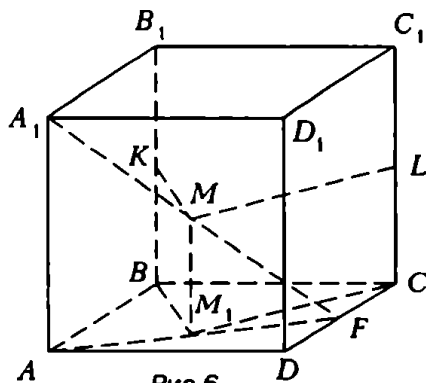


Рис. 6

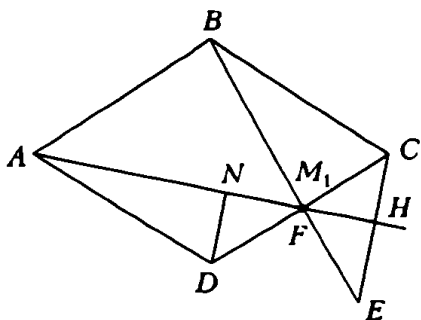


Рис. 7

Покажем, что искомая точка — это точка пересечения прямых $x = -2$ и PM , где точка P симметрична точке N относительно прямой $x = -2$. Пусть K' — произвольная точка прямой $x = -2$, отличная от K . Имеем $MK' + K'N = MK' + PK' > MP = PK + KM = KN + KM$. Поскольку средняя линия треугольника PMN лежит на прямой $x = -2$, треугольник MKN равнобедренный; тогда ордината точки K равна -3 . Отсюда $5 - 2b = -3$, $b = 4$.

Ответ: $b = 4$.

Задача 6. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом $\angle A = 60^\circ$. Длины всех ребер призмы равны 1. Точка F — середина ребра DC , а точка M лежит на прямой $A_1 F$. Определите наименьшее значение суммы площадей треугольников $M B B_1$ и $M C C_1$.

Решение. Пусть MK и ML — высоты соответственно треугольников $M B B_1$ и $M C C_1$ (рис. 6), M_1 — проекция точки M на плоскость ABC . Тогда $M_1 B = MK$, $M_1 C = ML$ (докажите!) и

$$S_{M B B_1} + S_{M C C_1} = \frac{1}{2} B B_1 \cdot M_1 B + \frac{1}{2} C C_1 \cdot M_1 C = \frac{1}{2} (M_1 B + M_1 C).$$

Как и в предыдущей задаче, сумма $M_1 B + M_1 C$ принимает наименьшее значение, если M_1 — точка пересечения прямых AF и BE , где E — точка, симметричная точке C относительно прямой AF (рис. 7).*

Осталось найти длину отрезка BE . По теореме косинусов

$$\begin{aligned} BE^2 &= BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot CE \cos \angle BCE = \\ &= 1 + CE^2 - 2CE \cos(60^\circ + \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \angle FCE$. Проведем в треугольнике ADF высоту DN .

*Снова задача о людоеде! (Прим. ред.)

Видно, что $CE = 2DN$ и $\angle FCE = \angle NDF$. Но

$$DN = \frac{2S_{ADF}}{AF} = \frac{AD \cdot DF \cdot \sin 120^\circ}{\sqrt{AD^2 + DF^2 - 2AD \cdot DF \cos 120^\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},$$

$$\cos \angle NDF = \frac{ND}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

После несложных вычислений получаем $BE = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}$.

Задача 7. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра имеют одинаковую длину, равную l . На ребре SA взята точка M так, что $SM = \frac{1}{4}l$, на ребре SB взята точка N , а на плоскости ABC взята точка P . Найдите наименьшую величину суммы длин отрезков MN и NP .

Решение. Длина отрезка NP минимальна, если P — проекция точки N на плоскость ABC . Очевидно, что P принадлежит медиане BE правильного треугольника ABC (рис. 8).

Теперь нужно найти кратчайшее расстояние от данной точки M до прямой BE по поверхности двугранного угла, образованного плоскостями ABS и BSE . Это все равно, что найти расстояние от точки до прямой на плоской развертке этого двугранного угла.

Рассмотрим такую развертку. Для этого в плоскости SBE построим треугольник SA_1B , равный треугольнику ASB (рис. 9). На стороне SA_1 отметим точку M_1 , в которую при разворачивании двугранного угла переходит точка M , так что $SM_1 = \frac{1}{4}l$. Как известно, кратчайшее расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую. Поэтому проведем $M_1P_1 \perp BE$. Очевидно, что сумма $MN + NP = M_1N + NP$ минимальна тогда и только тогда, когда

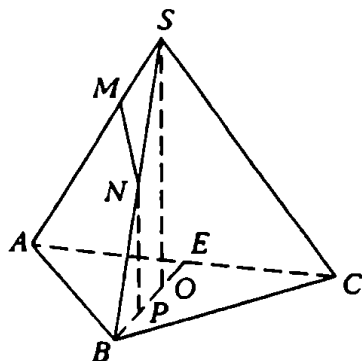


Рис.8

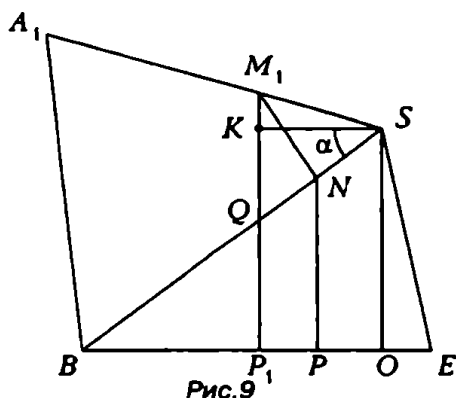


Рис.9

$P = P_1$ и $N = Q$. Осталось выяснить, чему равна длина отрезка M_1P_1 .

Проведем $SK \perp M_1P_1$. Пусть $\angle KSB = \angle SBE = \alpha$. Высота SO пирамиды равна $l\sqrt{\frac{2}{3}}$ (покажите!). Тогда

$$\begin{aligned} M_1P_1 &= M_1K + SO = \frac{l}{4} \sin(60^\circ - \alpha) + l\sqrt{\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{l}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) + l\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Выразив $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ из треугольников SBE и SBO , получим ответ: $\frac{l}{8} \left(1 + 7\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$.

Конечно, все эти задачи можно решать путем составления функции и исследования ее на экстремум. Но решение будет куда более громоздким.

Упражнения

1. Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$ наибольшей площади, если известно, что его вершина A удалена от середин сторон BC и CD на 6 и 8 единиц соответственно.

2. Две дуги окружностей радиусами R с центрами в точках A и B таких, что $AB = R$, пересекаются в точке C . Впишите в криволинейный треугольник ABC равнобедренную трапецию наибольшей площади.

3. Даны точки $A(0; 3)$, $B(4; 5)$. На оси Ox найдите такую точку C , чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

4. Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b ?

5. На координатной плоскости рассматриваются правильные треугольники, у которых две вершины лежат на прямой $y = x + 2$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству $x^2 \leq y \leq x + 2$. Найдите наибольшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

6. К кривой $y = -x^3 + bx$ в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = -3/2$ проведены касательные. При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy , будет наименьшим?

7. Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E , на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1 = 1$, $FD = \frac{3}{4}$, $EF = \frac{1}{2\sqrt{3}}$?

8. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что расстояния от точек A , B , C , S до середины ребра BC равны 4. При какой величине угла, образованного плоскостями ACS и SCD , объем пирамиды будет наибольшим?

Я.Груденов

Обычно решение задачи или доказательство теоремы мы проводим от известного к неизвестному, от данного к искомому. Но можно действовать и иначе. Здесь мы рассмотрим метод решения задач «с конца», когда рассуждения проводятся от неизвестного к известному, от искомого к данному.

ОБЩАЯ СХЕМА

Пусть требуется доказать некоторое утверждение A . Предположим, что оно верно, и на основе данных задачи и известных теорем попытаемся получить из A верное следствие. При этом возможно несколько случаев.

1. Получено неверное следствие. Это означает, что наше предположение о справедливости утверждения A ошибочно. Решение задачи на этом закончено — мы обнаружили, что A неверно.

2. Получено верное следствие. В этом случае следует обязательно проверить обратимость рассуждений, потому что из неверного утверждения (например, $a = -a$, $a \neq 0$) тоже можно получить верное следствие ($a^2 = a^2$).

а) Если все рассуждения обратимы, то A верно.

б) Если среди рассуждений есть необратимые (например, на некотором этапе мы возвели равенство в квадрат), то приходится применять другие методы отыскания решения задачи.

3. Если верное следствие получить не удастся, то также приходится перейти к другим методам.

ДВА УКАЗАНИЯ

1. В получаемых промежуточных выражениях желательно уменьшать число параметров, а затем упрощать эти выражения.

2. Если задача не содержит лишних условий*, то необходимо использовать все данные задачи.

*Нахождение лишнего условия является большим плюсом решения, но обычно конкурсные задачи лишних условий не содержат.

ПРИМЕРЫ

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 3 раза больше катета AB . Точками K и M катет AC разделен на три равные части. Докажите, что $\angle AMB + \angle AKB + \angle ACB = 90^\circ$.

Решение. Пусть $\angle AMB = \alpha$, $\angle AKB = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ (рис. 1). Предположим, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \quad (1)$$

или, так как $\alpha = 45^\circ$,

$$\beta + \gamma = 45^\circ. \quad (1a)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \operatorname{tg} 45^\circ, \quad (2)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} = 1. \quad (2a)$$

Равенство (2) или (2a) верно, так как

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AB}{AK} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

Учащиеся на этом обычно заканчивают решение задачи, что является грубой ошибкой. Начиная обращать преобразования, мы замечаем, что из справедливости равенства (2) следует вовсе не равенство (1a), а зависимость

$$\beta + \gamma = 45^\circ + 180^\circ \cdot n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$

Но из треугольников AKB и ACB мы находим, что $0 < \beta < 45^\circ$, $0 < \gamma < 45^\circ$, следовательно,

$$0 < \beta + \gamma < 90^\circ. \quad (3)$$

Поэтому из соотношений (2) и (3) следует, что $\beta + \gamma = 45^\circ$, и, так как $\alpha = 45^\circ$, то $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Задача 2. Докажите, что во всяком треугольнике $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь, R — радиус описанного круга.

Решение. Предположим, что верно равенство

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}. \quad (4)$$

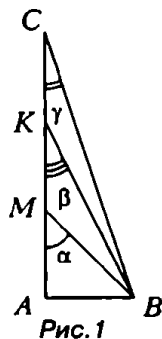


Рис. 1

Уменьшим число параметров:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A}, \quad R = \frac{a}{2 \cdot \sin A},$$

откуда

$$2R = \frac{a}{\sin A},$$

что верно по теореме синусов. Все преобразования легко обратить, следовательно, равенство (4) доказано.

Задача 3. Стороны треугольника a, b, c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $ac = 6Rr$, где R — радиус описанного, а r — радиус вписанного в треугольник круга.

Решение. Пусть верно равенство $ac = 6Rr$. Уменьшим число параметров, выразив R и r через стороны треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. Получим:

$$ac = 6 \cdot \frac{abc}{4 \cdot S} \cdot \frac{S}{p}, \quad 1 = \frac{3b}{2p}, \quad a + b + c = 3b, \quad \frac{a + c}{2} = b,$$

что верно, так как a, b, c составляют арифметическую прогрессию.

Все эти преобразования можно провести в обратном порядке, следовательно, доказываемое соотношение верно.

Задача 4. Докажите, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

Решение. Предположим, что верно равенство (рис. 2):

$$AC \cdot BM = AM \cdot BC + AB \cdot CM. \quad (5)$$

Уменьшим число параметров, выразив все отрезки через какие-либо другие элементы. Необходимость использования при этом всех данных задачи (четырехугольник — вписанный) наталкивает нас на мысль применить теорему синусов:

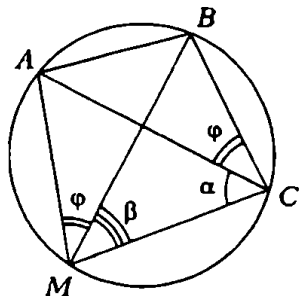


Рис.2

$$AC = 2R \cdot \sin(\varphi + \beta);$$

$$BM = 2R \cdot \sin(\alpha + \varphi);$$

$$AM = 2R \cdot \sin \alpha;$$

$$BC = 2R \cdot \sin \beta;$$

$$AB = 2R \cdot \sin \varphi;$$

$$CM = 2R \cdot \sin(\pi - (\alpha + \beta + \varphi)) = 2R \cdot \sin(\alpha + \beta + \varphi).$$

Подставляя эти выражения в равенство (5) и сокращая на $4R^2 \neq 0$, имеем:

$$\sin(\varphi + \beta) \cdot \sin(\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \varphi \cdot \sin(\alpha + \beta + \varphi).$$

Последнее равенство справедливо для любых углов α , β и φ (проверьте это самостоятельно, расписав функции суммы углов через функции углов).

Обратный переход не составляет труда, поскольку по условию четырехугольник — вписанный. Следовательно, соотношение (5) верно.

Задача 5. Стороны треугольника связаны соотношением $a^2 = bc + c^2$. Докажите, что угол A вдвое больше угла C .

Решение. Предположим, что

$$\angle A = 2\angle C. \quad (6)$$

Чтобы использовать соотношение, данное в условии задачи, углы в равенстве (6) целесообразно выразить через стороны треугольника:

$$\sin A = \sin 2C + 2\sin C \cdot \cos C, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \\ \sin C &= \frac{c}{2R}; \\ \sin A &= \frac{a}{2R}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где R — радиус описанного круга. Подставляя найденные выражения в равенство (7) и упрощая, получим

$$a^2b = c(a^2 + b^2 - c^2).$$

Уменьшим число параметров, воспользовавшись условием задачи:

$$(bc + c^2)b = c((bc + c^2) + b^2 - c^2),$$

что верно.

При попытке обратить рассуждения нам потребуется перейти от равенства (7) к равенству (6), но это не всегда возможно. Например, если $\angle A = 88^\circ$, $2\angle C = 92^\circ$, то $\sin A = \sin 2C$, но $A \neq 2C$. Из равенства (7) будет следовать равенство (6), если только углы A и $2C$ принадлежат интервалу монотонности синуса. Однако из условия задачи $a^2 = bc + c^2$ мы имеем лишь, что $a > c$ и $\angle A > \angle C$, т.е. $0 < A < 180^\circ$, $0 < 2C < 180^\circ$.

Но все же наши рассуждения не пропали бесполезно. Так как углы A и $2C$ заключены в интервале $(0, 180^\circ)$, т.е. в интервале монотонности косинуса, то лучше было бы перейти от равенства (6) к равенству $\cos A = \cos 2C$. Проверьте, что этот способ позволяет получить решение задачи.

Задача 6. Докажите, что

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2\operatorname{tg}\alpha, \quad (9)$$

если

$$3\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta). \quad (10)$$

Решение. Предположим, что равенство (9) верно. Чтобы воспользоваться условием (10), надо и в равенстве (9) перейти к синусам соответствующих аргументов:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) \left(\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \right);$$

$$\frac{1}{2}(\sin(2\alpha + \beta) + \sin\beta) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(2\alpha + \beta) + \sin(-\beta));$$

$$3\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta),$$

что верно по условию задачи.

Эти преобразования можно провести в обратном порядке (при всех допустимых значениях аргументов), поэтому равенство (9) верно.

Задача 7. Докажите, что при всех допустимых значениях α имеет место неравенство

$$|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha| > |\sin\alpha + \cos\alpha|. \quad (11)$$

Решение. Предположим, что неравенство (11) верно. Уменьшив число функций:

$$\left| \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} \right| > |\sin\alpha + \cos\alpha|; \quad (12)$$

$$\frac{1}{|\sin\alpha \cdot \cos\alpha|} > |\sin\alpha + \cos\alpha|. \quad (13)$$

Чтобы сравнить по величине эти выражения, желательно выразить их через одну функцию, например, через синус:

$$\frac{2}{|\sin 2\alpha|} > \sqrt{2} \left| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad (14)$$

Но $|\sin 2\alpha| \leq 1$, $\left| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq 1$, поэтому $\frac{2}{|\sin 2\alpha|} \geq 2$, а $\sqrt{2} \left| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2}$, и неравенство (14) верно при всех допустимых значениях α .

Из неравенства (14) следует (13), а значит, и (12), а из неравенства (12) следует (11), поэтому неравенство (11) верно при всех $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$.

Приведенные рассуждения показывают, что можно доказать более сильное неравенство

$$|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha| \geq \sqrt{2} |\sin \alpha + \cos \alpha|.$$

Задача 8. Докажите, что во всяком треугольнике

$$h_a > \sqrt{p(p-a)}, \quad (15)$$

где h_a — высота, опущенная на сторону a , p — полупериметр треугольника.

Решение. Пусть верно неравенство (15). Уменьшим число параметров:

$$\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\frac{1}{2}a} > \sqrt{p(p-a)}.$$

Мы воспользовались формулами

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} h_a \cdot a,$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} > \frac{1}{2} a.$$

Обе части неравенства положительны — их можно возвести в квадрат.

$$(p-b)(p-c) > \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} > \frac{a^2}{4},$$

$$a^2 + ab - ac + ac + bc - c^2 - ab - b^2 + bc > a^2,$$

$$2bc - c^2 - b^2 > 0,$$

$$-(b-c)^2 > 0,$$

что неверно. Следовательно, наше предположение о справедливости неравенства (15) ложно.

На этом решение задачи можно считать окончанным, ибо мы доказали, что формула (15) неверна. Впрочем, доказав, что формула (15) неверна, мы тем самым доказали, что всегда верна формула

$$h_a \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

Попробуйте выяснить, когда в последней формуле имеет место равенство. Здесь наш метод решения задачи «с конца» превратился в метод «от противного».

С описанным методом имеет некоторое сходство такой прием решения геометрических задач, когда искомые и другие неизвестные элементы (отрезки, углы и т.д.) обозначают буквами x , y , z , ... и оперируют с ними как с неизвестными.

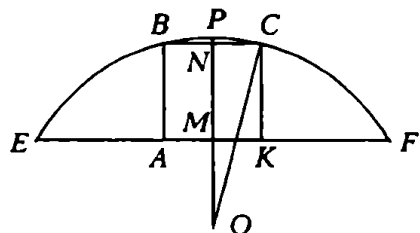


Рис.3

Задача 9. В сегмент, дуга которого содержит 120° , вписан квадрат. Найдите сторону квадрата, если радиус окружности равен R .

Решение. Пусть $ABCK$ — квадрат, $\cup EF = 120^\circ$, O — центр окружности (рис. 3). Обозначим BC через $2x$ и проведем $OP \perp EF$. Тогда $ON = \sqrt{R^2 - x^2}$, $OM = \frac{1}{2}R$, $MN = 2x$, $OM = ON - MN$. Имеем уравнение

$$\frac{R}{2} = \sqrt{R^2 - x^2} - 2x,$$

решив которое, получим $x = \frac{R(\sqrt{19} - 2)}{10}$.

Ответ: $\frac{R(\sqrt{19} - 2)}{5}$.

Многие учащиеся допускают ошибки не только при решении задач, но и при изложении теоретических вопросов. Вот как, например, они доказывают известное тождество

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

(при $x > 0$ и $y > 0$):

«Перенесем $\log_a y$ в левую часть и воспользуемся ранее доказанной теоремой:

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) + \log_a y = \log_a x;$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y \right) = \log_a x;$$

$$\log_a x = \log_a x.$$

Получили верное равенство, а значит, исходная формула доказана.►

Ясно, что этими рассуждениями формула еще не доказана. Учащиеся обычно даже не понимают сущности допускаемой ошибки и в оправдание ссылаются на школьный учебник, где формула доказана, мол, точно так же. Для них осталась незамеченной ссылка в учебнике на равносильность формул.

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20° . Докажите, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

2. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, образуют угол, равный полусумме двух других углов.

3. Докажите неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} > 1 + \operatorname{ctg} \varphi \text{ при } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

4. Докажите неравенство $(x+y)(x+y+2\cos x) + 2 \geq 2\sin^2 x$. При каких значениях x и y достигается равенство?

5. В треугольнике ABC углы A , B и C образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

6. Докажите, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log_{10} \pi} > 4.$$

7. Докажите, что максимальная полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $\frac{M^2}{24}$, где M — сумма длин всех ребер параллелепипеда.

8. Верно ли, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с произведением оснований?

9. Проверьте, верно ли доказано следующее неравенство:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \geq \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha + \sin \beta - 1.$$

«Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$2\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \beta - 2\sin \alpha \cdot \sin \beta - 2\sin \alpha - 2\sin \beta + 2 \geq 0,$$

или

$$(\sin \alpha - 1)^2 + (\sin \beta - 1)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \geq 0,$$

которое очевидно.►

10. Верно ли, что $\sin(\cos \varphi) = \cos(\sin \varphi)$?

Как известно, при решении геометрической задачи необходимо рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения элементов фигуры. Решение задачи, допускающей различные конфигурации, будет неполным и ошибочным, если ограничиться рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Решая такие задачи, важно не ошибиться, приняв частное за общее.

С подобными ошибками сталкиваются учителя на уроках, члены жюри олимпиад. Задачи с неполными и неверными решениями встречаются и в литературе для учащихся.

Приведем несколько примеров, взятых нами из различных сборников олимпиадных задач.

Задача 1. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник с наименьшей диагональю.

Решение. Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что его сторона KL лежит на прямой BC , а вершины M и N — на сторонах AC и AB (рис.1,а). Пусть AD — высота треугольника ABC . Построим треугольник $A'B'C'$ с прямым углом C' так, чтобы стороны BC и $B'C'$ были равны и располагались на одной прямой, и чтобы прямые AA' и BC были параллельны (рис.1,б). Тогда $A'C' = AD = h$.

Докажем, что если в треугольники ABC и $A'B'C'$ вписаны прямоугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$, имеющие равные высоты KN и $K'N'$, то эти прямоугольники равны.

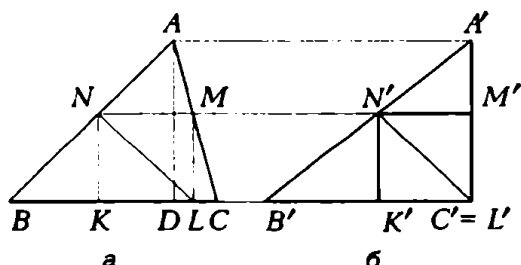


Рис. 1

Пусть $BC = a$. Из подобия треугольников ANM и ABC имеем

$$MN = \frac{a}{h}(h - x), \text{ где } x = KN.$$

Аналогично найдем, что

$$M'N' = \frac{a}{h}(h - x).$$

Значит, $MN = M'N'$, и задача сводится к более простой: в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.

Ясно, что диагональ вписанного в прямоугольный треугольник $A'B'C'$ прямоугольника, угол которого совпадает с углом C' , будет наименьшей, если она перпендикулярна гипотенузе $A'B'$. Любой другой прямоугольник будет иметь большую диагональ, так как его диагональ, являясь наклонной к гипотенузе $A'B'$, больше перпендикуляра к $A'B'$.

Отсюда следует построение и в общем случае, поскольку $KN = K'N'$. При этом ясно, что длина наименьшей диагонали искомого прямоугольника (две вершины которого лежат на стороне BC) равна $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. Кроме того, поскольку диагональ $L'N'$ прямоугольника $K'N'M'L'$ перпендикулярна $A'B'$ (см. рис.1,б), треугольники $K'N'L'$ и $A'B'C'$ подобны, так что $\frac{K'N'}{K'L'} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{a}{h}$, т.е. у искомого прямоугольника $KLMN$ отношение сторон $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Казалось бы, задача решена. Но это не так. Чтобы получить полное решение задачи, следует рассмотреть еще два случая: когда две вершины вписанного прямоугольника лежат на прямой AC и когда — на прямой AB , а затем сравнить результаты.

Пусть S — площадь треугольника ABC , a, b, c — длины его сторон, h_a, h_b, h_c — соответствующие им высоты.

Как мы уже доказали, наименьшее значение длины диагонали прямоугольника, вписанного в треугольник ABC так, что две его вершины лежат на прямой BC , равно

$$d_1 = \frac{ah_a}{\sqrt{a^2 + h_a^2}} = \frac{2S}{\sqrt{a^2 + h_a^2}}.$$

Следовательно, если две вершины прямоугольника лежат на прямой AC , то его диагональ имеет наименьшую длину, равную

$$d_2 = \frac{2S}{\sqrt{b^2 + h_b^2}}.$$

Будем считать, что данный треугольник разносторонний, и

$a > b > c$. Сравним выражения $a^2 + h_a^2$ и $b^2 + h_b^2$:

$$\begin{aligned}(a^2 + h_a^2) - (b^2 + h_b^2) &= (a^2 - b^2) + (h_a^2 - h_b^2) = \\ &= (a^2 - b^2) + \left(\left(\frac{2S}{a} \right)^2 - \left(\frac{2S}{b} \right)^2 \right) = a^2 - b^2 + \left(\frac{4S^2}{a^2} - \frac{4S^2}{b^2} \right) = \\ &= (a^2 - b^2) \left(1 - \frac{4S^2}{a^2 b^2} \right) > 0,\end{aligned}$$

поскольку $a > b$ и $2S < ab$.

Итак, $a^2 + h_a^2 > b^2 + h_b^2$, и значит, если $a > b$, то $d_1 < d_2$.

В результате проведенного исследования можно сделать следующий окончательный вывод: из всех прямоугольников $KLMN$, вписанных в данный треугольник ABC , наименьшую диагональ имеет прямоугольник, две вершины которого лежат на большей стороне BC треугольника, и отношение сторон которого $\frac{KN}{KL} = \frac{a}{h}$.

Предлагаем читателям самостоятельно решить

Упражнение 1. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник, диагональ которого имеет данную длину d . Сколько решений может иметь задача?

Задача 2. Через вершину A треугольника ABC проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до этой прямой от вершин B и C треугольника была наибольшей.

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABEC$ (рис.2). Пусть l — прямая, проведенная через вершину A ,

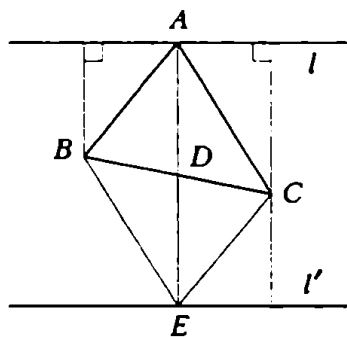


Рис.2

l' — параллельная ей прямая, проведенная через вершину E . Очевидно, расстояние от вершины B до прямой l равно расстоянию от вершины C до прямой l' . Значит, сумма интересующих нас расстояний равна расстоянию между прямыми l и l' , т.е. расстоянию от точки E до прямой l . Это расстояние будет наибольшим, если прямая l перпендикулярна прямой AE , т.е. перпендикулярна медиане AD треугольника

ABC , проведенной из вершины A . При этом интересующее нас наибольшее значение суммы расстояний равно $2AD$.

Рассуждение на первый взгляд не вызывает сомнений. Тем не менее в нем имеется ошибка. Для правильного решения задачи необходимо рассмотреть два возможных случая: 1) прямая l пересекает сторону BC треугольника; 2) прямая l сторону BC не пересекает. В первом случае рассуждение теряет силу (сделайте

рисунк!). В этом случае сумма расстояний d_1 от вершин B и C до прямой l не больше BC и $d_1 = BC$ тогда и только тогда, когда прямая l перпендикулярна стороне BC . Во втором же случае сумма расстояний d_2 не больше $AE = 2AD$ и $d_2 = 2AD$ только тогда, когда прямая l перпендикулярна медиане AD . Остается сравнить d_1 и d_2 . Получается следующий ответ:

если угол A больше 90° , то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для прямой l , перпендикулярной стороне BC (и проходящей через вершину A);

если угол A меньше 90° , то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для прямой l , перпендикулярной медиане AD (и проходящей через вершину A);

если угол A равен 90° , то наибольшее значение суммы расстояний от вершин B и C достигается для *двух* прямых l_1 и l_2 , перпендикулярных соответственно прямым BC и AD' (и проходящих через вершину A).

Отметим, что наше первоначальное рассуждение (приведшее к выводу « l перпендикулярна AD ») неверно даже и для одного случая — когда прямая l лежит вне треугольника и не пересекает сторону BC . Действительно, угол BAD может быть тупым, и если через вершину A провести прямую l перпендикулярно AD , она пересечет сторону BC .

Упражнение 2. Через вершину A треугольника ABC проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до этой прямой от вершин B и C треугольника была наименьшей.

Задача 3. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наибольшей.

Решение. Пусть данные окружности пересекаются в точках A и M (рис.3,а). Проведем через точку A произвольную прямую, пересекающую окружность с центром O_1 в точке B , а окружность с центром O_2 — в точке C . Проведем перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC . Легко видеть, что $BC = 2H_1H_2$. Поскольку H_1H_2 — ортогональная проекция отрезка O_1O_2 на прямую BC , $H_1H_2 = O_1O_2 \cos \alpha$, где α — угол между секущей BC и линией центров O_1O_2 , так что

$$BC = 2O_1O_2 \cdot \cos \alpha,$$

и отрезок BC имеет наибольшую длину, равную $2O_1O_2$, тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$, т.е. секущая BC параллельна прямой O_1O_2 .

Приведенное рассуждение, однако, неверно. Дело в том, что в задаче говорится не об отрезке BC , а об отрезке секущей,

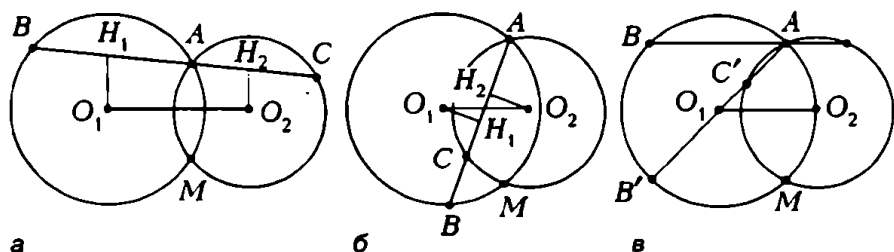


Рис.3

заключенном внутри кругов. Возможны три случая расположения точек B и C : секущую можно провести так, что эти точки будут лежать

- 1) по разные стороны от точки A (рис.3,а);
- 2) по одну сторону от точки A (рис.3,б)
- 3) одна из них, например точка C , будет совпадать с точкой A (сделайте рисунок).

В случае, если точка C лежит между точками A и B (рис.3,б), отрезком секущей, заключенным внутри кругов, является не отрезок BC , а отрезок AB — хорда окружности! Хорда же имеет наибольшую длину, если она проходит через центр и является диаметром окружности. Таким образом, следует еще выяснить, какой из отрезков больше: отрезок, параллельный прямой O_1O_2 , длина которого равна $2O_1H_2$ (убедитесь самостоятельно, что во всех перечисленных случаях $BC = 2H_1H_2$), или же диаметр $2R$ большей окружности (рис.3,в). Окончательно получается следующий ответ:

если $O_1O_2 > R$, то секущую следует провести параллельно линии центров O_1O_2 ;

если $O_1O_2 < R$, то секущую следует провести через центр большей окружности;

если $O_1O_2 = R$, то условию задачи удовлетворяют две прямые, одна из которых параллельна O_1O_2 , а другая проходит через центр большей окружности (рис.3,в).

Для окружностей одинакового радиуса получается аналогичный ответ, только в случаях $O_1O_2 \leq R$ к указанным прямым до- является еще прямая, проходящая через центр второй окружности.

Упражнение 3. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы ее часть, заключенная внутри кругов, была наименьшей.

В качестве упражнений приведем еще несколько задач с «решениями», в которых читателю предлагается самостоятельно найти ошибку.

Задача 4. Из всех треугольников ABC с данным основанием BC и данным углом при вершине A найдите треугольник, имеющий наибольшую медиану, проведенную к основанию.

«Решение». Пусть ABC — равнобедренный треугольник и $A'BC$ — произвольный треугольник, имеющий с треугольником ABC общее основание BC и угол A' , равный углу A (рис.4). Тогда точка A' лежит на дуге BAC окружности, описанной около треугольника ABC . Обозначим центр этой окружности через O и середину стороны BC через D . Медиана AD равнобедренного треугольника ABC является его осью симметрии. Поэтому точка O лежит на AD и, следовательно, $AD = AO + OD$. Из треугольника $A'OD$ имеем $A'D < A'O + OD = AO + OD = AD$. Значит, из всех треугольников ABC с данным основанием BC и постоянным углом A при вершине наибольшую медиану имеет равнобедренный.

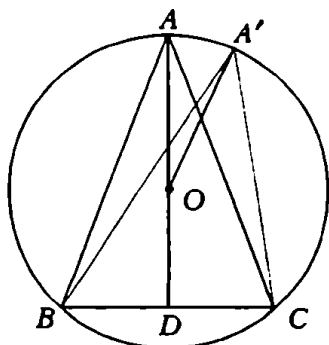


Рис.4

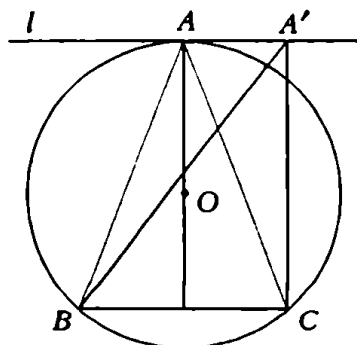


Рис.5

Задача 5. Из всех треугольников ABC с данным основанием BC и постоянной высотой AH найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса.

«Решение». Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC и постоянной высотой AH , и A_1BC — произвольный треугольник с такой же высотой, точки A и A_1 лежат на прямой l , параллельной прямой BC (рис.5). Окружность, описанная около треугольника ABC , касается l в точке A , значит, точка A_1 лежит вне этой окружности. Поэтому угол A больше угла A_1 .

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , вычисляется по формуле $R = \frac{a}{2\sin \angle A}$ ($a = BC$). А так как $\sin \angle A > \sin \angle A_1$, то наименьший радиус имеет окружность, описанная около равнобедренного треугольника.

Ответ: равнобедренный треугольник с основанием BC и данной высотой.

Задача 6. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Известно, что $CH = AB$. Найдите угол при вершине C .

«Решение». Пусть BD и CE — высоты треугольника ABC (рис.6). Поскольку треугольники ABD и CDH имеют равные гипотенузы ($AB=CH$) и равные острые углы ($\angle ABD = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACE$), они равны. Поэтому $BD = CD$. Значит, прямоугольный треугольник BCD — равнобедренный, следовательно, $\angle ACB = 45^\circ$.

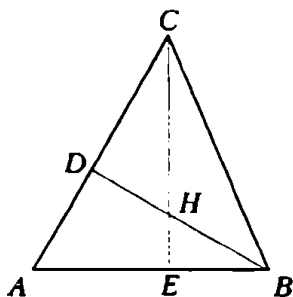


Рис.6

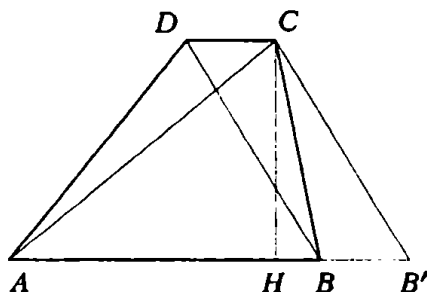


Рис.7

Задача 7. Определите площадь трапеции по двум диагоналям, равным 17 и 113, и высоте, равной 15.

«Решение». Пусть $ABCD$ — данная трапеция, CH — ее высота (рис.7). Проведем $CB' \parallel BD$ до пересечения с AB в точке B' . Четырехугольник $BDCB'$ — параллелограмм, так что

$$AB' = AB + BB' = AB + CD,$$

и поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника $AB'C$.

Найдем AB' . Из прямоугольных треугольников ACH и $B'CH$ по теореме Пифагора находим $AH = \sqrt{113^2 - 15^2} = 112$, $B'H = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$, так что $AB' = AH + B'H = 120$, и искомая площадь трапеции равна 900 (кв. единиц).

В заключение мы можем дать такой общий совет: чтобы получить правильное решение геометрической задачи, решите ее для одного случая, а затем проверьте, годится ли найденное решение для всех других возможных случаев. Не забывайте, что треугольник может быть не только остроугольным, что центр описанной около треугольника окружности не всегда лежит внутри треугольника, что угол при большем основании трапеции может быть тупым и т.д. Иногда удается найти и такой подход к задаче, который, обладая общностью, позволяет получить решение, охватывающее все возможные случаи. Решение одной и той же задачи разными способами не только позволяет отыскивать наиболее простое и красивое решение задачи, но и служит эффективным средством контроля и проверки.

В математических задачах часто бывает полезен такой прием: двумя способами найти одну и ту же величину и приравнять полученные для нее выражения. Пусть мы, например, двумя способами нашли площадь некоторой фигуры. Если в одно из выражений для площади входит, скажем, синус какого-либо угла α , то при помощи соотношения $\sin \alpha \leq 1$ из полученного равенства можно получить некоторое неравенство, порой интересное. В статье этот прием иллюстрируется восемью задачами. Эти задачи доступны восьмиклассникам, но они интересны и для поступающих в вуз — задачи такого типа попадают на устных экзаменах.

Ключ к решению приведенных ниже задач — три формулы для площадей. Как известно, площадь *треугольника* равна половине произведения двух (любых) его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha. \quad (1)$$

Выведите отсюда, что площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними*:

$$S = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \alpha. \quad (2)$$

Докажите также, что площадь *описанного многоугольника* равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:

$$S = \frac{1}{2} Pr. \quad (3)$$

Задача 1. Докажите, что произведение любых двух сторон *треугольника* не меньше произведения его периметра на радиус *вписанной окружности*: $ab \geq Pr$.

*Почему не нужно указывать, какой именно угол между диагоналями рассматривается?

Решение. Достаточно приравнять выражения (1) и (3) для площади треугольника и учесть, что $\sin \alpha \leq 1$.

Замечание. Из решения видно, что если угол между сторонами с длинами a и b — не прямой, то

$$ab > Pr. \quad (4)$$

Из неравенства (4) и замечания следует, что для любого треугольника $ab + bc + ca > 3Pr$.

Задача 2. Докажите, что радиус R окружности, описанной около произвольного треугольника, радиус r вписанной окружности и его периметр P удовлетворяют неравенству

$$a) \quad R > \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{Pr}, \quad (5)$$

если треугольник остроугольный или тупоугольный;

$$б) \quad R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{Pr}, \quad (6)$$

если треугольник прямоугольный.

Решение. а) Соединим центр O описанной окружности с вершинами треугольника.

Для остроугольного треугольника (рис. 1)

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}. \quad (7)$$

По формуле (3)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} Pr, \quad (8)$$

а по формуле (1)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha, \quad (9)$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} R^2 \sin \beta, \quad (10)$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} R^2 \sin \gamma. \quad (11)$$

Из равенств (7) — (11)

$$Pr = R^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma). \quad (12)$$

Из общих свойств синуса $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3$. Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$,

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma < 3. \quad (13)$$

Для тупоугольного треугольника (с тупым углом в вершине B — рис. 2)

$$S_{ABC} = (S_{AOB} - S_{COB}) - S_{AOC}$$

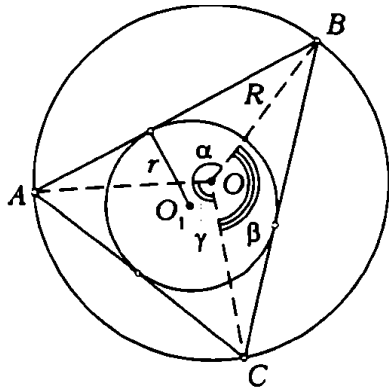


Рис. 1

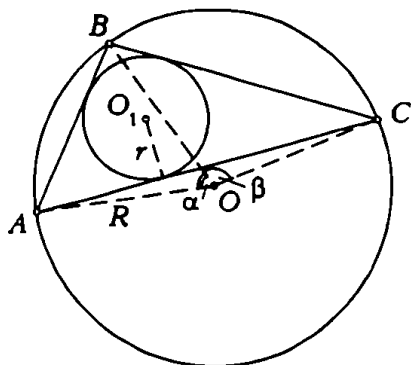


Рис. 2

или

$$Pr = R^2(\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)). \quad (14)$$

Поскольку $\alpha \leq 1$, $\sin \beta \leq 1$, $\sin(\alpha + \beta) \geq -1$ и $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, мы имеем $\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) < 3$. Отсюда и из (14) получаем (5).

б) Соединим вершину прямого угла C с центром O описанной окружности. Для прямоугольного треугольника ABC аналог равенств (12), (14) имеет вид:

$$Pr = R^2(\sin \angle AOC + \sin \angle COB).$$

Отсюда $\frac{Pr}{R^2} \leq 2$, что доказывает неравенство (6).

Если $\angle A = \angle B = 45^\circ$, то $R = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{Pr}$; в этом случае радиус R принимает наименьшее значение. Таким образом, из всех прямоугольных треугольников с фиксированным произведением Pr или, что все равно (см. формулу (3)), с фиксированной площадью S , минимальный радиус R имеет равнобедренный треугольник.

Задача 3. Докажите, что периметр P четырехугольника, описанного около окружности радиусом r , и длины его диагоналей l_1 , l_2 удовлетворяют неравенству

$$Pr \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}.$$

Решение. Из формул (2) и (3)

$$Pr = l_1 l_2 \sin \alpha. \quad (15)$$

Из неравенства $(l_1 - l_2)^2 \geq 0$ следует $l_1 l_2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}$, откуда, в силу (15), получаем искомое неравенство.

Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то $\sin \alpha = 1$, т.е. $Pr = l_1 l_2$. Если еще $l_1 = l_2 = l$ (т.е. четырехугольник — квадрат), то

$$Pr = l^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}.$$

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Пусть P_1, P_2, P_3 и P_4 — периметры, соответственно, треугольников AOB, BOC, COD и DOA , а r_1, r_2, r_3 и r_4 — радиусы вписанных в них окружностей. Докажите неравенство

$$OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \geq \sqrt{(P_1 r_1) \cdot (P_2 r_2) \cdot (P_3 r_3) \cdot (P_4 r_4)}. \quad (16)$$

Решение. С одной стороны, по формуле (3)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} P_1 r_1. \quad (17)$$

С другой стороны, по формуле (1)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \angle AOB. \quad (18)$$

Из (17) и (18)

$$P_1 r_1 \leq OA \cdot OB. \quad (19)$$

Аналогично,

$$P_2 r_2 \leq OB \cdot OC, \quad (20)$$

$$P_3 r_3 \leq OC \cdot OD, \quad (21)$$

$$P_4 r_4 \leq OD \cdot OA. \quad (22)$$

Из (19) — (22) легко получается требуемое неравенство.

Равенство достигается, когда $AC \perp BD$. Из (16) и (13) легко получается неравенство

$$S_{AOB} \cdot S_{BOC} \cdot S_{COD} \cdot S_{DOA} \leq \frac{1}{16} OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2 \cdot OD^2.$$

Задача 5. Докажите, что для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо неравенство

$$S_{ABCD} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}, \quad (23)$$

где a, b, c, d — длины его сторон.

Решение. Разобьем четырехугольник диагональю на два треугольника (рис. 3). Тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}.$$

По формуле (1)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \angle B.$$

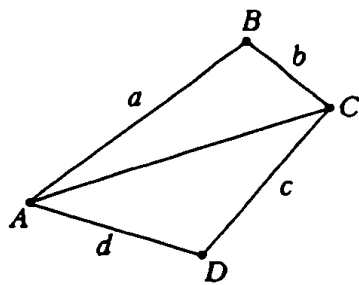


Рис.3

Отсюда и из неравенства $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ получаем

$$S_{ABC} \leq \frac{a^2 + b^2}{4}. \quad (24)$$

Аналогично

$$S_{ADC} \leq \frac{c^2 + d^2}{4}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получаем требуемое неравенство.

Если $\angle B = \angle D = 90^\circ$ и $a = b = c = d$, т.е. четырехугольник $ABCD$ — квадрат, то соотношение (23) превращается в равенство.

Упражнения

1. Докажите, что для трапеции с высотой h , диагоналями l_1, l_2 и основаниями a, b

$$h \leq \frac{l_1 l_2}{a + b}.$$

2. Докажите, что для треугольника ABC

$$S_{ABC} < \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2),$$

где a, b, c — длины сторон.

3. Докажите, что для выпуклого четырехугольника $ABCD$

$$S_{ABCD} < \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

где a, b, c, d — длины сторон, e, f — длины диагоналей.

И.Габович, П.Горнштейн

Задача 1. При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка $A(1;2)$ переходит в $A_1(6;5)$, а $B(1;4)$ — в $B_1(4;5)$. Найдите образ точки $C(1;3)$. Найдите образ еще одной точки (по вашему усмотрению). Найдите величину угла α и координаты точки M .

Решение. Отметим на координатной плоскости точки A, A_1, B, B_1 и C (рис. 1) Для определения координат $(x; y)$ точки M

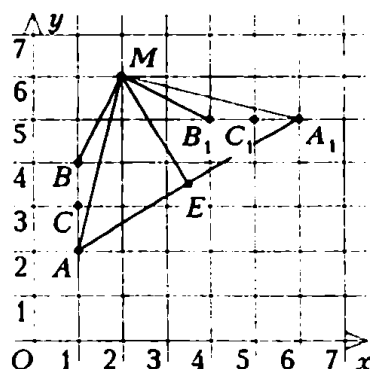


Рис. 1

воспользуемся тем, что поворот является движением и поэтому $MA^2 = MA_1^2$ и $MB^2 = MB_1^2$, т.е.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + (y-5)^2, \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x=2$ и $y=6$.

Пусть при указанном повороте точка C переходит в C_1 . Определим координаты $(x_1; y_1)$ точки C_1 . Точка C , как нетрудно заметить,

является серединой AB , и поэтому ее образ — точка C_1 — является серединой A_1B_1 . Учитывая это, получаем, что точка C_1 имеет координаты $(5;5)$.

Определим теперь величину угла α . Заметив, что абсциссы точек A и B одинаковы ($AB \parallel Oy$) и ординаты точек A_1 и B_1 одинаковы ($A_1B_1 \parallel Ox$), заключаем, что модуль угла поворота равен $\pi/2$. Так как поворот на 90° , совмещающий MA с MA_1 , направлен против часовой стрелки, $\alpha = +\pi/2$.

Осталось найти образ еще одной точки («по нашему усмотрению»). Проще всего, конечно, взять точку $M(2;6)$, образ которой совпадает с ней самой. Задача решена.

Чтобы научиться решать подобные задачи (они часто попадают на экзаменах), вычислим образ еще одной точки (D).

Пусть $D(3;1)$, ее образ при повороте — точка D_1 . Определим координаты $(x; y)$ точки D_1 . Для этого воспользуемся равенствами

$$MD_1^2 = MD^2 \text{ и } A_1D_1^2 = AD^2,$$

равносильными системе

$$\begin{cases} (2-x)^2 + (6-y)^2 = 26, \\ (6-x)^2 + (5-y)^2 = 5. \end{cases} \quad (1)$$

Решая систему (1), находим

$$\begin{cases} x_1 = 7, \\ y_1 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{101}{17}, \\ y_2 = \frac{47}{17}. \end{cases}$$

Теперь необходимо выяснить, какое из полученных решений является координатами точки D_1 . Взглянув на чертеж, читатель сразу увидит, что правильным является первое решение, а второе — постороннее. На экзамене, однако, требуется строгое обоснование выбора правильного решения. Прежде чем привести это обоснование, выясним геометрический смысл полученных решений и объясним, почему их два.

Первое уравнение системы (1) есть уравнение окружности с центром в точке M и радиусом, равным MD (рис. 2). Второе уравнение системы (1) — уравнение окружности с центром в точке A_1 и радиусом, равным AD . Вторая окружность пересекает первую в двух точках — $D_1(7;7)$ и

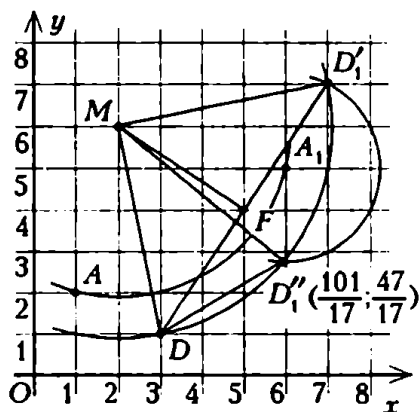


Рис. 2

$D_1''(101/17; 47/17)$, одна из которых является образом точки D . (Если же точка D принадлежит, например, лучу MA , то вторая окружность будет касаться первой, и мы получим одно решение системы (1), которое и будет искомым.)

Ясно, что $\triangle DMD_1$ и $\triangle DMD_1''$ — равнобедренные и лишь один из углов $\angle DMD_1$, $\angle DMD_1''$ равен α (в нашей задаче $\alpha = \pi/2$).

Определим, какой. Рассмотрим $\triangle DMD_1$. Найдем DD_1 :

$$DD_1 = \sqrt{(7-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{52}.$$

Пусть F — середина DD_1 , тогда $DF = (1/2)\sqrt{52}$. Из $\triangle DMF$:

$$\sin \angle DMF = \frac{DF}{DM} = \frac{\sqrt{52}}{2\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\angle DMF = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle DMD_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Из двух точек, получающихся при отыскании образа некоторой точки $N(a; b)$, естественно выбрать для проверки ту, координаты которой «проще» (это облегчает вычисления). Если выяснится, что выбранная для проверки точка дает нужное решение, то она и является образом точки N . Если — не дает, то, естественно, образом точки является вторая точка.

Задача 2. На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$. Вершины A и B квадрата лежат на графике функции $y = x^2$, а вершины C и D — на графике функции $y = x - 4$. Определите длину стороны квадрата.

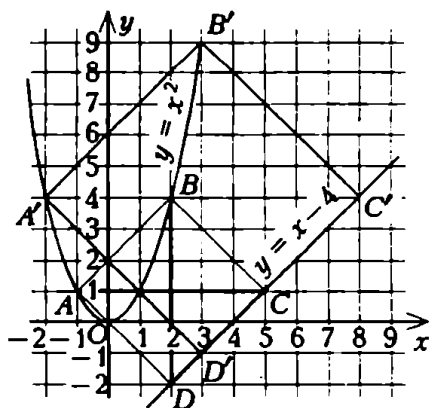


Рис.3

Решение. На координатной плоскости (рис. 3) изображены графики функций $y = x^2$, $y = x - 4$ и квадрат $ABCD$, расположенный так, как указано в условии. Поскольку прямая $y = x - 4$ перпендикулярна прямой $y = -x$, $AC \parallel O_x$ и $BD \parallel O_y$. Пусть $AC = l$ и $A(x_1; y_1)$, тогда: $C(x_1 + l; y_1)$;

$B(x_1 + l/2; y_1 + l/2)$; $D(x_1 + l/2; y_1 - l/2)$. Найдем l . Учитывая, что вершины A и B лежат на графике функции $y = x^2$, а вершина D принадлежит графику функции $y = x - 4$, составляем систему:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2, \\ y_1 + \frac{l}{2} = \left(x_1 + \frac{l}{2}\right)^2, \\ y_1 - \frac{l}{2} = x_1 + \frac{l}{2} - 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1^2, \\ x_1^2 + \frac{l}{2} = \left(x_1 + \frac{l}{2}\right)^2, \\ x_1^2 - \frac{l}{2} = x_1 + \frac{l}{2} - 4. \end{cases} \quad (2)$$

Из второго уравнения системы (2) находим x_1 :

$$x_1 = \frac{2-l}{4}.$$

Найденное значение x_1 подставляем в последнее уравнение системы (2):

$$\left(\frac{2-l}{4}\right)^2 - \frac{l}{2} = \frac{2-l}{4} + \frac{l}{2} - 4,$$

откуда $l_1=6$ и $l_2=10$.

Таким образом, для стороны квадрата мы получили два значения: $3\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$, т.е. задача имеет два решения (на рисунке 3 им соответствуют два квадрата: $ABCD$ и $A'B'C'D'$).

Задача 3. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ($KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1 \parallel NN_1$) равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка KA равна $1/4$. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка M_1B равна $2/5$. Через центр куба O и точки A и B проведена плоскость α . Точка P — проекция вершины K_1 на плоскость α . Найдите длину отрезка AP .

Решение. Для решения этой задачи с помощью метода координат нет необходимости строить сечение куба плоскостью α . (Это сечение, однако, изображено на рисунке 4, а ниже мы объясним, как его построить). В качестве системы координат мы возьмем систему $Lxyz$, где оси Lx , Ly , Lz направлены по LK , LM , LL_1 соответственно.

Треугольник AK_1P — прямоугольный, так как $K_1P \perp \alpha$ по условию. Поэтому

$$AP = \sqrt{AK_1^2 - K_1P^2}. \quad (3)$$

Найдем координаты точек A , B , O и K_1 : $A(3/4; 0; 0)$; $B(0; 1; 3/5)$; $O(1/2; 1/2; 1/2)$ и $K_1(1; 0; 1)$.

Из $\triangle KK_1A$ находим $AK_1^2 = 1 \frac{1}{16}$. Длину отрезка K_1P найдем, как расстояние от точки K_1 до плоскости α , воспользовавшись формулой

$$\rho(K_1; \alpha) = \frac{|ax_0 + bx_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad (4)$$

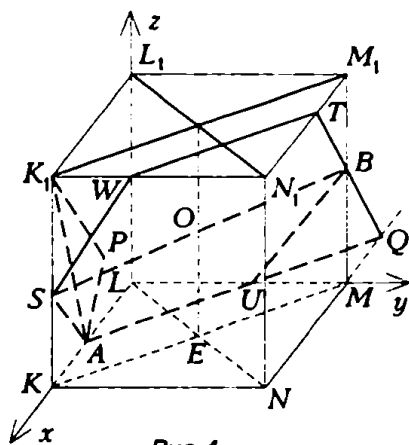


Рис. 4

где $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки K_1 , а числа a, b, c и d — координаты уравнения

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (5)$$

определяющего плоскость α .

Чтобы найти значения a, b, c и d , подставим в уравнение (5) координаты точек A, B и O . Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a + d = 0, \\ b + \frac{3}{5}c + d = 0, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + d = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = -(4/3)d$; $b = -(3/2)d$ и $c = (5/6)d$. Подставив найденные значения a, b и c в (5), после элементарных преобразований получаем уравнение плоскости α :

$$8x + 9y - 5z - 6 = 0.$$

Теперь по формуле (4) определим

$$K_1P = \rho(K_1; \alpha) = \frac{|8 \cdot 1 + 9 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{64 + 81 + 25}} = \frac{3}{\sqrt{170}}.$$

И, наконец, из (3) находим AP :

$$AP = \sqrt{\frac{17}{16} - \frac{9}{170}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1373}{85}}.$$

Замечание. На «чистовике» решения этой задачи приводить чертеж не обязательно. Полезно, однако, сделать чертеж на черновике. Ради большей наглядности мы приводим здесь построение сечения данного куба плоскостью α (рис. 4). Находим точку S , в которой прямая OB , принадлежащая α , пересечет ребро KK_1 . SA — отрезок, по которому α пересекает грань KK_1L_1L . Ясно, что α пересекает грань NN_1M_1M по отрезку BT , параллельному AS . $Q = BT \cap MN$; очевидно, $Q \in \alpha$ и $Q \in KLM$, $AQ = \alpha \cap KLM$; находим $U = AQ \cap LM$. Теперь уже построение сечения не вызывает затруднений.

Задача 4. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через

точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

Решение. $SABC$ (рис. 5) — данная в условии пирамида. Точки E и F — середины ребер BC и AB соответственно. Введем систему координат, как показано на рисунке*, определим координаты вершин пирамиды и точек E и F : $A(0; 4\sqrt{2}; 0)$; $B(2\sqrt{6}; 2\sqrt{2}; 0)$

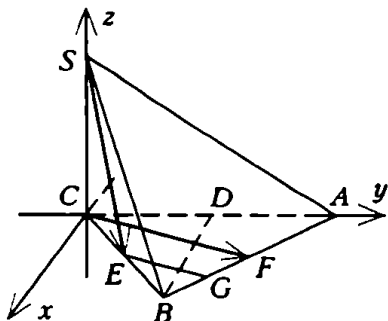


Рис. 5

(абсцисса точки B находится как высота равностороннего треугольника из соотношения $h = (a\sqrt{3})/2$, где h — высота и a — сторона треугольника); $C(0; 0; 0)$; $S(0; 0; 2)$; $E(\sqrt{6}; \sqrt{2}; 0)$ и $F(\sqrt{6}; 3\sqrt{2}/2; 0)$. Угол между скрещивающимися прямыми находится с помощью скалярного умножения векторов \vec{SE} и \vec{CF} ; он равен $\pi/4$.

Для определения расстояния между скрещивающимися прямыми проведем в плоскости ABC через точку E прямую, параллельную CF ; G — точка, в которой эта прямая пересекает сторону AB . Очевидно, что координаты G будут $(3\sqrt{6}/2; 5\sqrt{2}/2; 0)$ (проверьте самостоятельно).

Пересекающиеся прямые SE и EG (или, что то же, три точки: S, E, G) определяют некоторую плоскость

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (6)$$

которая параллельна прямой CF (так как $EG \parallel CF$) и содержит SE . Поэтому расстояние от любой точки CF до плоскости SEG равно расстоянию между скрещивающимися прямыми SE и CF .

Определим теперь значения коэффициентов a, b, c и d в уравнении (6). Подставив в уравнение (6) координаты точек S, E и G , получаем систему

$$\begin{cases} 2c + d = 0, \\ \sqrt{6}a + \sqrt{2}b + d = 0, \\ \frac{3\sqrt{6}}{2}a + \frac{5\sqrt{2}}{2}b + d = 0. \end{cases}$$

Из нее находим: $a = -(\sqrt{6}/4)d$; $b = (\sqrt{2}/4)d$ и $c = -(1/2)d$.

*Здесь чертеж простой, и его целесообразно привести в «чистовике» решения.

Подставив найденные значения a , b и c в (6), после элементарных преобразований получаем уравнение

$$\sqrt{6}x - \sqrt{2}y + 2z - 4 = 0.$$

В качестве произвольной точки прямой CF выберем точку C и определим (аналогично тому, как мы это сделали в предыдущей задаче) ее расстояние до плоскости SEG :

$$\rho(C, SEG) = \frac{|-4|}{\sqrt{6+2+4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, искомое расстояние между скрещивающимися прямыми SE и CF равно $2\sqrt{3}/3$.

Задача 5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота — 3. Вершина A куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C_1 — на высоте пирамиды, а ребро CD лежит в плоскости одной из боковых граней. Найдите длину ребра куба.

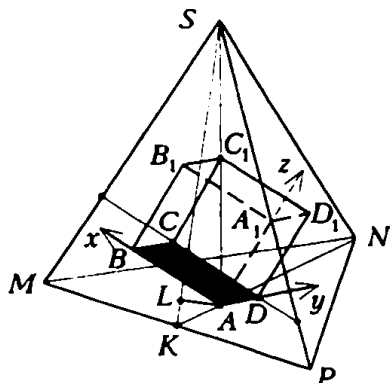


Рис.6

Решение. Пусть ребро CD куба лежит в грани SMP (это не нарушает общности). Введем систему координат $Axyz$, где оси Ax , Ay , Az направлены по ребрам куба AB , AD , AA_1 соответственно (рис. 6). Пусть $AB=m$. Очевидно, точка C имеет координаты $(m; m; 0)$.

Если длина диагонали куба равна a , то его ребра имеют длину $a\sqrt{3}/3$. Из этого и $SA=3$ легко вывести, что в выбранной нами системе координат точка S имеет координаты $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Пусть

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (7)$$

— уравнение плоскости грани SMP в выбранной нами системе координат. Так как плоскость SMP не проходит через начало координат, $d \neq 0$. Коэффициенты в уравнении (7) определяются (как это уже делалось выше) из того, что точки C , D и S принадлежат плоскости (7). Имеем

$$\begin{cases} ma + mb + d = 0, \\ mb + d = 0, \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}c + d = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a=0, b=-d/m, c = \frac{\sqrt{3}-m}{m\sqrt{3}} d.$$

Подставив найденные значения a , b и c в (7), приходим к уравнению

$$\sqrt{3}y + (m - \sqrt{3})z - m\sqrt{3} = 0.$$

Воспользовавшись формулой (4), найдем расстояние от точки $A(0; 0; 0)$ до плоскости грани SMP :

$$\rho(A; SMP) = \frac{|-m\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + (m - \sqrt{3})^2}} = \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2m\sqrt{3} + 6}}. \quad (8)$$

Определим теперь то же расстояние другим способом. Проведем в грани SMP апофему SK пирамиды и соединим точку K с точкой A . В $\triangle SAK$ проведем $AL \perp SK$; AL — расстояние точки A до грани SMP (обоснуйте!).

Так как данная пирамида правильная,

$$AK = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{6} = \sqrt{2}.$$

Из $\triangle SAK$:

$$SK = \sqrt{11},$$

$$AL = \frac{SA \cdot AK}{SK} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

Приравняв полученное в (8) выражение для $\rho(A; SMP)$ найденному значению AL , получаем уравнение

$$\frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2m\sqrt{3} + 6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}},$$

из которого и находим m :

$$m = \frac{6}{5}(2\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

Упражнения

1. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $1/3$. На ребре BC взята точка F так, что длина BF равна $1/4$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α . Найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости α .

2. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , длина гипотенузы AB которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое

ребро пирамиды SC перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ равна 3, а высота $4\sqrt{3}$. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1 B_1 C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найдите длину ребра призмы.

4. Графики функций $y = 1/(2x)$ и $y = (17/3) - 2x$, рассматриваемые в первой координатной четверти ($x > 0$; $y > 0$), пересекаются в точках A и B . Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси OX , две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB . Найдите длины сторон треугольника.

5. В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, острый угол A которого имеет величину 60° , длины сторон AB и BC равны, соответственно, a и $2a$. Боковые ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, их длина равна a . Через вершины A , B_1 и D_1 параллелепипеда проведена плоскость. Найдите расстояние от вершины C до этой плоскости.

6. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, длина диагонали равна 10. На плоскости выбрана точка O , удаленная от вершин B и D на одинаковое расстояние, равное 13. Найдите расстояние от точки O до ближайшей вершины прямоугольника.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC , длины катетов AB и AC которого равны $3a$ и $4a$ соответственно. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину a . Через середины ребер AB , SC и точку, лежащую на ребре AC и удаленную от вершины A на расстояние a , проведена плоскость. Определите величину двугранного угла, образованного этой плоскостью и плоскостью основания.

Скалярное умножение векторов является одним из основных понятий векторной алгебры. Его свойства широко используются при доказательстве теорем и решении задач.

В этой статье мы проиллюстрируем применение скалярного умножения векторов к решению геометрических задач, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах в разных вузах нашей страны. Мы не будем останавливаться на теории этого вопроса. Перейдем к решению задач.

Задача 1. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a . Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой, проходящей через точки C_1 и B , а вершины P и Q — на прямой A_1C . Найдите 1) объем призмы; 2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ .

Решение. Рассмотрим векторы \vec{CA} , \vec{CB} , $\vec{CC_1}$, $\vec{CA_1}$ и $\vec{BC_1}$ (рис.1). Обозначим $\vec{CA} = \vec{u}$, $\vec{CB} = \vec{v}$, $\vec{CC_1} = \vec{h}$ и $|\vec{h}| = h$. Из условия следует, что $|\vec{u}| = |\vec{v}| = a$.

Так как в правильном тетраэдре (как, впрочем, и во всякой правильной треугольной пирамиде) любые два скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны, то $\vec{CA_1} \perp \vec{BC_1}$. Поэтому $\vec{CA_1} \cdot \vec{BC_1} = 0$. Но в наших обозначениях

$$\vec{CA_1} = \vec{u} + \vec{h} \text{ и } \vec{BC_1} = \vec{h} - \vec{v},$$

следовательно,

$$(\vec{u} + \vec{h}) \cdot (\vec{h} - \vec{v}) = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{h} - \vec{u} \cdot \vec{v} + h^2 - \vec{h} \cdot \vec{v} = 0.$$

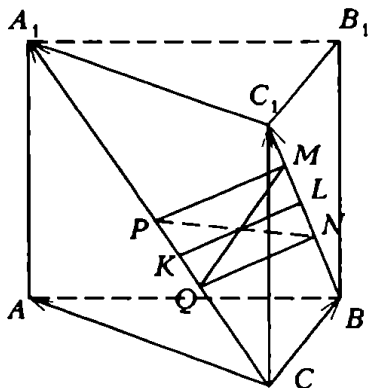


Рис. 1

Учитывая, что $\vec{h} \perp \vec{u}$, $\vec{h} \perp \vec{v}$ и угол между векторами \vec{u} и \vec{v} равен $\frac{\pi}{3}$, получаем

$$h^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \text{ или } h = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

откуда находим объем призмы

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{8}.$$

Пусть K и L — середины отрезков PQ и MN соответственно. Найдем KL . Заметим, что KL является общим перпендикуляром ребер PQ и MN (докажите это сами), т.е. KL — расстояние между скрещивающимися прямыми CA_1 и BC_1 .

Существует несколько способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми. Мы определим искомое расстояние с помощью скалярного умножения. При этом, как мы увидим, не будет необходимости строить общий перпендикуляр. Важен лишь факт его существования. Так как K и L лежат на прямых CA_1 и BC_1 соответственно, имеем

$$\vec{CK} = x\vec{CA_1} = x\vec{u} + x\vec{h}, \quad \vec{BL} = y\vec{BC_1} = y\vec{h} - y\vec{v}. \quad (*)$$

Ясно (см. рис.1), что

$$\begin{aligned} \vec{KL} &= \vec{KC} + \vec{CB} + \vec{BL} = -\vec{CK} + \vec{CB} + \vec{BL} = -x\vec{u} - x\vec{h} + \vec{v} + \\ &\quad + y\vec{h} - y\vec{v} = -x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h}. \end{aligned}$$

Как указывалось выше, KL является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых CA_1 и BC_1 . Поэтому

$$\begin{cases} \vec{KL} \cdot \vec{CA_1} = 0, \\ \vec{KL} \cdot \vec{BC_1} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(-x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h} \right) \left(\vec{u} + \vec{h} \right) = 0, \\ \left(-x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h} \right) \left(\vec{h} - \vec{v} \right) = 0. \end{cases}$$

После выполнения элементарных преобразований получаем

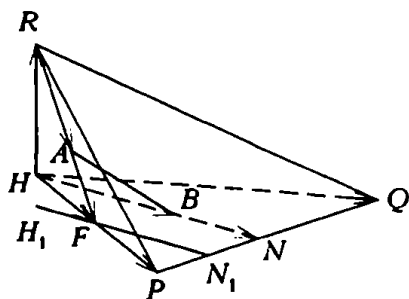
$$x = \frac{1}{3} \text{ и } y = \frac{2}{3}.$$

Теперь уже можно определить KL через скалярный квадрат вектора KL :

$$\begin{aligned}\vec{KL} &= -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{h}, \\ \vec{KL}^2 = KL^2 &= \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{9}a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{6}, \\ KL &= \frac{a}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

Замечание. На рисунке 1 правильный тетраэдр $MNPQ$ изображен так, что середины K и L скрещивающихся ребер MN и PQ лежат на отрезках A_1C и BC_1 . В условии же задачи сказано, что эти точки лежат на *прямых* A_1C и BC_1 . Это мы учли в формулах (*), где x и y могут быть больше 1 или меньше 0. Но вычисления показали, что $x = 1/3$, $y = 2/3$, т.е. точки K и L действительно лежат на соответствующих отрезках, как показано на рисунке 1.

Задача 2. Основанием треугольной пирамиды $RHPQ$ является равнобедренный прямоугольный треугольник HPQ , гипотенуза которого PQ равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро RH перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 1. Найдите угол и расстояние между прямыми RF и HN , где F — середина HP и N — середина PQ .



Решение. Выполним параллельный перенос прямой HN , переводящий ее в прямую H_1N_1 , проходящую через точку F (рис.

2). Обозначим $\angle RFH = \varphi$, $\angle HFN_1 = \beta$ и $\angle RFH_1 = \gamma$. Из условия задачи непосредственно следует, что

$$\varphi = \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Определим искомый угол γ с помощью формулы

$$\cos \gamma = \cos \varphi \cdot \cos \beta. \quad (1)$$

Получим

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Определим теперь расстояние между прямыми RF и HN . Пусть \vec{AB} — их общий перпендикуляр. Рассмотрим векторы \vec{HP} , \vec{HQ} , \vec{HR} , \vec{RF} , \vec{RA} , \vec{HN} и \vec{AB} . Обозначим: $\vec{HP} = \vec{p}$, $\vec{HQ} = \vec{q}$ и

$\vec{HR} = \vec{r}$. Остальные векторы выразим через \vec{p} , \vec{q} и \vec{r} . Очевидно, что $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$ и $|\vec{r}| = 1$. Пусть $|RA| = x|RF|$, $|HB| = y|HN|$. Тогда $\vec{RA} = x\vec{RF}$ и $\vec{HB} = y\vec{HN}$.

Очевидно, что $\vec{RF} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r}$ и $\vec{HN} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$ (\vec{HN} — медиана в треугольнике HPQ). Поэтому

$$\vec{RA} = \frac{x}{2}\vec{p} - x\vec{r}, \quad \vec{HB} = \frac{y}{2}\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q}.$$

Выразим теперь \vec{AB} через векторы \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AR} + \vec{RH} + \vec{HB} = -\vec{RA} - \vec{HR} + \vec{HB} = \\ &= -\frac{x}{2}\vec{p} + x\vec{r} - \vec{r} + \frac{y}{2}\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} = \frac{1}{2}(y-x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x-1)\vec{r}. \end{aligned}$$

Так как $AB \perp RF$ и $AB \perp HN$, то $\vec{AB} \cdot \vec{RF} = 0$ и $\vec{AB} \cdot \vec{HN} = 0$. Составляем систему

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}(y-x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x-1)\vec{r} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r} \right) = 0, \\ \left(\frac{1}{2}(y-x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x-1)\vec{r} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} \right) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы, учитывая, что векторы \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} взаимно перпендикулярны и $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$, а $|\vec{r}| = 1$, находим, что $x = 2/3$ и $y = 1/3$. Найдём теперь AB :

$$\vec{AB} = -\frac{1}{6}\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{q} - \frac{1}{3}\vec{r}, \quad AB^2 = \frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}, \quad AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основанию AD , $BC = a$, $AD = b$ ($a < b$). На основании AD существует такая точка M , что MB перпендикулярен AC , а MC перпендикулярен BD . Найдите высоту трапеции.

Решение. Положим $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{h}$ и $\vec{MD} = \vec{y}$ (рис. 3). Тогда $\vec{BD} = \vec{a} + \vec{R}$, $\vec{CM} = \vec{h} - \vec{y}$, $\vec{AC} = \vec{b} + \vec{h}$ и $\vec{BM} = \vec{a} + \vec{h} - \vec{y}$. Так как векторы \vec{BD} и \vec{CM} перпендикулярны, то $\vec{BD} \cdot \vec{CM} = 0$, откуда

$$\left(\vec{a} + \vec{h} \right) \cdot \left(\vec{h} - \vec{y} \right) = 0$$

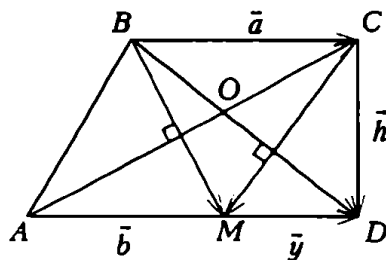


Рис.3

или

$$\vec{a} \cdot \vec{h} - \vec{a} \cdot \vec{y} + \vec{h}^2 - \vec{h} \cdot \vec{y} = 0. \quad (2)$$

Так как вектор \vec{h} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{y} , то $\vec{a} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{y} = 0$. Поэтому из (2) имеем

$$-\vec{a} \cdot \vec{y} + h^2 = 0. \quad (3)$$

Так как векторы \vec{a} и \vec{y} коллинеарны и сонаправлены, то $\vec{a} \cdot \vec{y} = ay$. Поэтому из (3) следует, что

$$h^2 = ay. \quad (4)$$

Так как векторы \vec{AC} и \vec{BM} перпендикулярны, то $\vec{AC} \cdot \vec{BM} = 0$ или

$$(\vec{b} - \vec{h}) \cdot (\vec{a} + \vec{h} - \vec{y}) = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{h} - \vec{b} \cdot \vec{y} - \vec{a} \cdot \vec{h} - \vec{h}^2 + \vec{h} \cdot \vec{y} = 0. \quad (5)$$

Как уже отмечалось, $\vec{a} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{y} = 0$. На том же основании $\vec{b} \cdot \vec{h} = 0$. Поэтому из (5) имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{y} - h^2 = 0, \quad ab - by - h^2 = 0, \quad y = \frac{ab - h^2}{b}. \quad (6)$$

Значение y из (6) подставляем в (4):

$$h^2 = \frac{a^2b - ah^2}{b},$$

откуда

$$h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Задача 4. Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг вершины O на 90° , причем вершина A перешла в A' , а вершина B — в B' . Докажите, что в треугольнике OAB' медиана, проведенная к стороне AB' , является высотой для треугольника $OA'B$ (аналогично медиана к стороне $A'B$ в треугольнике $OA'B$ является высотой для $\triangle OAB'$).

Решение. Пусть \vec{C} — середина AB' (рис. 4). Докажем, что $\vec{OC} \perp \vec{A'B}$, т.е. $\vec{OC} \cdot \vec{A'B} = 0$; имеем

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB'}), \quad \vec{A'B} = \vec{OB} - \vec{OA'},$$

$$\begin{aligned} \vec{OC} \cdot \vec{A'B} &= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB'}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA'}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OA'} + \vec{OB'} \cdot \vec{OB} - \vec{OB'} \cdot \vec{OA'}). \end{aligned}$$

Из условия следует, что $\vec{OA} \perp \vec{OA'}$ и $\vec{OB} \perp \vec{OB'}$. Поэтому $\vec{OA} \cdot \vec{OA'} = \vec{OB} \cdot \vec{OB'} = 0$. Кроме того, ясно, что $|\vec{OA}| = |\vec{OA'}|$, $|\vec{OB}| = |\vec{OB'}|$ и $\angle AOB = \angle A'OB'$. Поэтому $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA'} \cdot \vec{OB'}$.

Таким образом, $\vec{OC} \cdot \vec{A'B} = 0$.

Аналогично доказывается и вторая часть задачи.

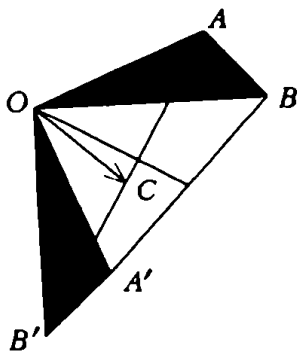


Рис. 4

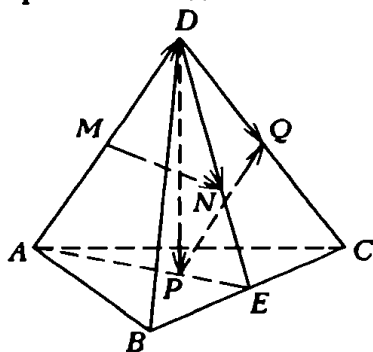


Рис. 5

Задача 5. В правильном тетраэдре $DABC$ отрезок MN соединяет середину ребра AD с центром грани BCD , а отрезок QP соединяет середину ребра CD с центром грани ABC . Найдите угол между отрезками MN и PQ .

Решение. Положим $AD = a$ (рис. 5). Очевидно, что $MD = a/2$, $DQ = a/2$, $DN = (a\sqrt{3})/3$. Нетрудно показать (вычислите сами), что $DP = (a\sqrt{6})/3$, $PQ = MN = a/2$.

Пусть φ — величина угла между векторами \vec{MN} и \vec{PQ} . Найдём значение φ из определения скалярного умножения двух векторов:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{MN} \cdot \vec{PQ}}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{PQ}|}. \quad (7)$$

Запишем очевидные векторные равенства

$$\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DN}, \quad \vec{PQ} = \vec{DQ} + \vec{DP}. \quad (8)$$

Значения \vec{MN} и \vec{PQ} из (8) подставляем в (7):

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{MD} + \vec{DN}) \cdot (\vec{DQ} + \vec{DP})}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{PQ}|} = \frac{\vec{MD} \cdot \vec{DQ} + \vec{DN} \cdot \vec{DQ} + \vec{MD} \cdot \vec{DP} + \vec{DN} \cdot \vec{DP}}{MN \cdot PQ}. \quad (9)$$

Заметим, что $\angle MDQ = \frac{2}{3}\pi$ и $\angle PDM = \pi - \angle MDP$. Очевидно, что $\cos \angle MDP = \frac{\sqrt{6}}{3}$, а $\cos \angle NDP = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Учитывая сказанное выше, получаем

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{4a^2}{9}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{1}{18},$$

а $\varphi = \arccos \frac{1}{18}$ и есть угол между отрезками MN и PQ .

Задача 6. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, BD — высота треугольника ABC . Равносторонний треугольник BED лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC , причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC . Найдите расстояние между точками S и E .

Решение. Проведем (рис. 6) в треугольнике BDE высоту EM и соединим точки O и E . Через точку M проведем $MN \parallel AC$ и $MP \parallel SO$. Так как отрезки MN и AC параллельны, то они составляют с плоскостью BDE равные углы. Так как $MN \perp BD$ и $EM \perp BD$, то $\angle EMN$, как легко понять, является тем углом, который MN (а значит и AC) составляет с плоскостью BED , т.е. $\angle EMN = \varphi$. Так как $MP \parallel SO$, то $MP \perp ABC$ и следовательно, $MP \perp BD$ и $MP \perp MN$. Поэтому $\angle EMP = 90^\circ + \varphi$. Очевидно, что

$$\vec{SE} = \vec{SO} + \vec{OM} + \vec{ME}.$$

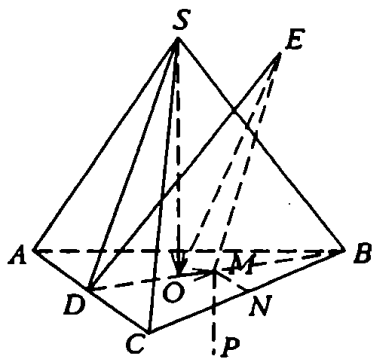


Рис. 6

Найдем скалярный квадрат вектора \vec{SE} :

$$\vec{SE}^2 = \vec{SO}^2 + \vec{OM}^2 + \vec{ME}^2 + 2 \cdot \vec{SO} \cdot \vec{OM} + 2 \cdot \vec{SO} \cdot \vec{ME} + 2 \cdot \vec{OM} \cdot \vec{ME}.$$

Очевидно, что $\vec{SO} \cdot \vec{OM} = \vec{OM} \cdot \vec{ME} = 0$. Как нетрудно сообразить, угол между векторами \vec{SO} и \vec{ME} равен $\angle EMP = 90^\circ + \varphi$,

$$SE^2 = SO^2 + OM^2 + ME^2 - 2 \cdot SO \cdot ME \cdot \sin \alpha. \quad (10)$$

Но $SO = \sqrt{6}/3$ как высота правильного тетраэдра с ребром, равным 1; $ME = 3/4$ как высота правильного треугольника со стороной, равной $\sqrt{3}/2$; $OM = \sqrt{3}/12$ (вычислите самостоятельно).

Найденные значения SO , OM и ME подставляем в (10):

$$SE^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{3}{4} \sin \varphi = \frac{5 - 2\sqrt{6} \sin \varphi}{4},$$

$$SE = \frac{1}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{6} \sin \varphi}.$$

Задача 7. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a ; точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на

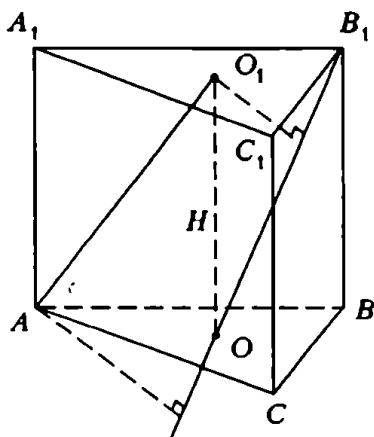


Рис. 7

прямую B_1O равна $\frac{5}{6}a$. Определите высоту призмы.

Решение. Положим $OO_1 = H$. Очевидно (рис. 7), что $|\vec{AO}| = |\vec{OB}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $|\vec{OB}_1| = \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$. Далее,

$$\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 = |\vec{AO}_1| \cdot |\vec{OB}_1| \cos \varphi. \quad (11)$$

Известно, что проекция одного вектора на другой равна длине первого вектора, умноженной на косинус угла между направлени-

ями векторов, т.е. проекция \vec{AO}_1 на \vec{OB}_1 равна $|\vec{AO}_1| \cdot \cos \varphi$. Согласно условию задачи, эта проекция равна $\frac{5a}{6}$. Поэтому равенство (11) запишется так:

$$\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 = |\vec{OB}_1| \cdot \frac{5a}{6}. \quad (12)$$

Запишем очевидные равенства:

$$\vec{AO}_1 = \vec{AO} + \vec{OO}_1, \quad \vec{AB}_1 = \vec{OB} + \vec{BB}_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 &= (\vec{AO} + \vec{OO}_1) \cdot (\vec{OB} + \vec{BB}_1) = \\ &= \vec{AO} \cdot \vec{OB} + \vec{AO} \cdot \vec{BB}_1 + \vec{OO}_1 \cdot \vec{OB} + \vec{OO}_1 \cdot \vec{BB}_1. \end{aligned}$$

Так как $\vec{AO} \perp \vec{BB}_1$ и $\vec{OO}_1 \perp \vec{OB}$, то $\vec{AO} \cdot \vec{BB}_1 = \vec{OO}_1 \cdot \vec{OB} = 0$. Кроме того, $\vec{OO}_1 = \vec{BB}_1$, следовательно, $\vec{OO}_1 \cdot \vec{BB}_1 = OO_1^2$,

$$\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 = \vec{AO} \cdot \vec{OB} + OO_1^2 = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + H^2 = \frac{a^2}{6} + H^2.$$

Найденные значения $\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1$ и OB_1 подставляем в (12): $\frac{a^2}{6} + H^2 = \frac{5a}{6} \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$, откуда $108H^4 - 39a^2H^2 - 22a^4 = 0$. Так как $H > 0$, то $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Упражнения

1. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AC = BC = a$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1 , а вершины P и Q — на прямой AB_1 . Найдите 1) объем призмы; 2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ .

2. Длина ребра куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равна a . Точка E — середина ребра AD . Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1 , а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R . Найдите 1) отношение $BR : BC$; 2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ .

3. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BCD , а точка E лежит на середине ребра AB . Найдите угол между отрезками MN и DE .

4. Два отрезка — AB длиной a и CD длиной b лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми α . Основания O и O_1 общего перпендикуляра длиной c к этим прямым делят отрезки AB и CD так, что $OA : OB = 2 : 3$, а $OO_1 : C_1D = 3 : 2$. Найдите длины отрезков BD и BC .

5. В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ длина общего перпендикуляра ребер SA и BC равна d и его основание делит отрезок BC в отношении $1:3$. Определите объем пирамиды.

6. В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M . Докажите, что $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$.

7. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC , причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC . Докажите, что угол DHQ — прямой.

ЧЕРТЕЖ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

Г.Дорофеев, Н.Розов

На роль чертежа в решении геометрической задачи поступающие смотрят по-разному. Одни думают, что чертеж вообще не нужен, и выполняют его подчеркнуто небрежно. Другие, наоборот, считают сам чертеж достаточным аргументом в рассуждениях и даже не находят нужным как-либо обосновывать то, что «видно из чертежа». Обе эти крайние точки зрения неправильны.

Разумеется, никакой чертеж, даже самый аккуратный, не может заменить логического доказательства, а является лишь иллюстрацией к рассуждениям. Любой геометрический факт, который мы «увидели» на чертеже, необходимо строго обосновать — только тогда можно утверждать, что этот факт действительно имеет место, а не получен из верного (или, что гораздо опаснее, неверного) рисунка.

В то же время наглядный чертеж — хороший помощник при решении задачи: он может подсказать идею необходимых рассуждений и вычислений, натолкнуть на мысль использовать некоторую теорему или придумать удачное дополнительное построение. Недаром математики вообще часто прибегают к геометрическим иллюстрациям, чтобы сделать идеи доказательства более понятными. Однако помочь решить задачу может только чертеж, правильно отражающий существенные геометрические особенности конфигурации, о которой идет речь в условии. Именно поэтому к чертежу следует относиться очень внимательно.

Часто поступающие ограничиваются первым более или менее удачно выполненным рисунком, не интересуясь, насколько точно сделанный чертеж отвечает условию задачи. Между тем во многих задачах провести полное решение по одному чертежу в принципе невозможно, поскольку условие задачи допускает существование геометрически различных конфигураций. Кро-

ме того, такая привязанность к одному «случайному» чертежу приводит и к иной неприятности: в ходе решения задачи может обнаружиться противоречие между получающимися результатами и исходным чертежом, которое обычно ставит поступающих в тупик. Однако при правильном понимании роли чертежа в этом нет ничего страшного — следует просто отказаться от первоначального изображения и сделать новый чертеж, соответствующий появившейся геометрической информации (конечно, при условии, что проведенные рассуждения и вычисления правильны).

При построении чертежа бывает полезно делать не примерный эскиз, дающий лишь общее представление о геометрической конфигурации, а стремиться последовательно конструировать чертеж, опираясь на данные задачи и общие геометрические факты. При таком подходе легче «увидеть» те идеи, которые можно применить в решении.

Задача 1. В треугольнике ABC угол B равен 90° , $AB = 4$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Окружность радиусом $\sqrt{5}/2$ проходит через точки B и D и касается в точке E окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите площадь треугольника ABC .

Решение. Прежде всего построим треугольник ABC с прямым углом B (рис. 1). Для построения окружности, описанной около этого треугольника, выясним сначала, где находится ее центр O и чему равен ее радиус. Как известно, центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы. Это дает возможность построить описанную окружность.

Займемся теперь построением другой окружности. Отметив на стороне BC точку D , мы можем утверждать, что центр этой окружности лежит на перпендикуляре, проведенном через середину K отрезка BD . Из условия касания окружностей заключаем, что центр рассматриваемой окружности лежит на радиусе описанной окружности, проведенном в точку касания, т.е. в точку E . Иначе говоря, центр S окружности, о которой идет речь в условии, есть точка пересечения прямой SK и медианы BO .

Построение чертежа закончено, В ходе этого построения мы установили два факта, на которых и основыв-

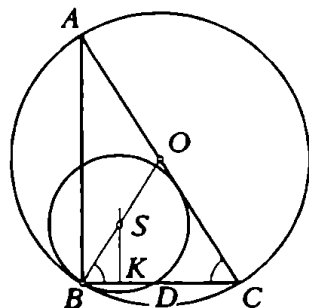


Рис. 1

вается решение задачи: во-первых, центр S лежит на стороне BO равнобедренного треугольника BOC ; во-вторых, перпендикуляр, опущенный из центра S на катет BC , проходит через середину отрезка BD .

Теперь проведем необходимые вычисления. Из прямоугольного треугольника BSK по теореме Пифагора находим $SK = 1$, а тогда $\operatorname{ctg} \angle SBK = 1/2$. Но $\angle ACB = \angle OBC$, и поэтому $BC = AB \operatorname{ctg} \angle ACB = 2$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна 4.

Итак, задача полностью решена, а идею решения мы получили благодаря последовательному конструированию чертежа. Одна-

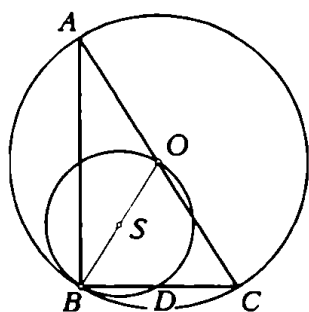


Рис. 2

ко, как это ни удивительно на первый взгляд, чертеж, изображенный на рисунке 1, полностью условию задачи не соответствует. В самом деле, проведенные вычисления показывают, что $BC = 2$, $AC = 2/\sqrt{5}$. Следовательно $BO = \sqrt{5} = 2 \cdot SB$, т.е. BO — диаметр окружности с центром S , которая, таким образом, проходит через точку O . Другими словами, полностью соответствует данным задачи рисунок 2.

В чем же причина неполного соответствия рисунка 1 данным задачи? Дело в том, что проведенное конструирование чертежа касалось только его геометрической стороны, но не учитывало всех конкретных числовых данных. Более того, мы и не могли их учесть, поскольку все числовые размеры конфигурации, а следовательно, и ее геометрически точный вид, удастся установить только после соответствующих вычислений.

Тем не менее изложенное выше решение является исчерпывающим, хотя, как мы теперь убедились, основывалось на неточном чертеже. Это объясняется просто: в наших рассуждениях нигде не использовалось взаимное расположение точки O и окружности с центром S , выяснение их взаимного расположения при данном способе решения задачи не обязательно.

Подобная ситуация является в геометрической задаче типичной. Практически никогда, приступая к решению, мы не в состоянии построить чертеж, абсолютно точно отображающий всю специфику конфигурации, — многие ее особенности вскрываются только в ходе рассуждений. Поэтому важно прежде всего выявлять геометрические свойства, существенные в данной задаче. Это требует особого внимания и осторожности, поскольку с первого взгляда далеко не всегда очевидно, какие именно

особенности конфигурации окажутся существенными и в какой мере допустимо несоответствие между данной конфигурацией и чертежом.

Разумеется, если в процессе решения выясняется, что чертеж явно не соответствует данным задачи, его следует заменить на правильный. Например, в следующей задаче даже развитое геометрическое воображение не может помочь сразу выполнить чертеж, точно отражающий существенные особенности конфигурации.

Задача 2. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиусом 1. Докажите, что центр указанной сферы лежит на ребре AB , и найдите высоту пирамиды.

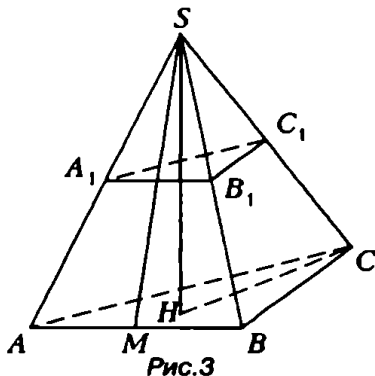
Решение. Сделаем традиционный чертеж пирамиды $SABC$ (рис.3), построим ее высоту SH и проведем отрезок HC . Так как по условию задачи $\angle SCH = 60^\circ$, то из треугольника CHS находим $SH = a\sqrt{3}/2$, $HC = a/2$, где через a обозначена длина ребра SC .

По условию вершины A, B, C и середины A_1, B_1, C_1 соответствующих боковых ребер лежат на одной сфере. Отсюда, в частности, следует, что через точки A, A_1, B, B_1 проходит окружность — сечение этой сферы плоскостью грани SAB . Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то четырехугольник AA_1B_1B — трапеция, и притом равнобокая, поскольку она вписана в окружность. Поэтому

$$AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}SB.$$

Аналогичные рассуждения для четырехугольника BB_1C_1C показывают, что пирамида $SABC$ имеет равные боковые ребра: $SA = SB = SC = AB = a$. Отсюда видно, что треугольник ASB — равносторонний, а поэтому апофема SM этой боковой грани равна $a\sqrt{3}/2$, т.е. $SM = SH$.

Таким образом, высота пирамиды совпадает с апофемой боковой грани ASB . Но тогда точка H совпадает с M , а грани ASB и ABC взаимно перпендикулярны. Поэтому изображенная на



рисунке 3 картина на самом деле не соответствует условию задачи, верным будет рисунок 4.

Дальнейшее решение не представляет труда. Проекция на плоскость ABC (рис.4) равных наклонных SA, SB, SC равны: $HA = HB = HC = a/2$, следовательно, точка H — центр окружности, описанной около треугольника ABC , а потому центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости основания, восстановленном из точки H , т.е. на высоте SH пирамиды (или на ее продолжении). Центр этой сферы равноудален, например, от точек A и A_1 . Поскольку $HA_1 = a/2$ как средняя линия треугольника ASB , то $HA_1 = HA$, так что точка H , лежащая на ребре AB , как раз и является центром сферы. Но радиус этой сферы по условию равен 1, $HA = a/2 = 1$, $a = 2$ и $SH = \sqrt{3}$.

Иногда само условие задачи умышленно бывает сформулировано несколько неопределенно — так, что оно явно допускает геометрически существенно различные чертежи, и непосредственно по исходным данным не ясно, какая именно из конфигураций имеется в виду. В таком случае надо изобразить на нескольких чертежах все возможности, отвечающие условию задачи, а затем, исследуя каждый чертеж, найти истинную геометрическую конфигурацию.

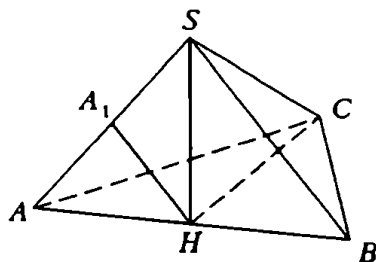


Рис.4

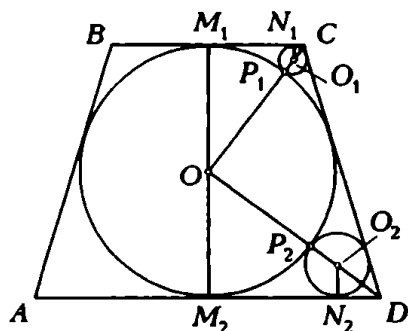


Рис.5

Задача 3. В равнобокой трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиусом 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найдите площадь трапеции.

Решение. Непосредственно из условия задачи не ясно, в какой из углов трапеции — в тупой или в острый — вписана вторая окружность. Поэтому мы должны рассмотреть оба ва-

рианта (рис.5) и попытаться выяснить, какой из них согласуется с конкретными числовыми соотношениями, заданными в условии.

Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, O_1, O_2 — центры второй окружности (два варианта!), $P_1, P_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ — точки касания. Радиусы второй окружности обозначим через r_1, r_2 . Из подобия треугольников OM_1C и O_1N_1C в первом случае и OM_2D и O_2N_2D во втором имеем

$$\frac{OM_1}{O_1N_1} = \frac{OC}{O_1C}, \quad \frac{OM_2}{O_2N_2} = \frac{OD}{O_2D},$$

и, поскольку $OC = OP_1 + P_1C = 1 + 4r_1$, $OD = OP_2 + P_2D = 1 + 4r_2$, то в обоих случаях

$$\frac{1}{2r} = \frac{1+4r}{3r},$$

откуда $r = 1/2$. По теореме Пифагора из треугольников OM_1C и OM_2D соответственно получаем теперь, что

$$M_1C = 2\sqrt{2}, \quad M_2D = 2\sqrt{2}.$$

Итак, если вторая окружность вписана в тупой угол трапеции, то меньшее основание трапеции равняется $4\sqrt{2}$; если же вторая окружность вписана в острый угол трапеции, то большее основание трапеции равно $4\sqrt{2}$. Между тем, если в равнобокую трапецию с основаниями a и b , где $a < b$, вписана окружность диаметром d , то выполняется неравенство $a < d < b$ — это следует, например, из легко доказываемого и весьма полезного соотношения $d = \sqrt{ab}$. Поэтому в нашей задаче меньшее основание трапеции должно быть меньше 2, так что окружность с центром O_1 условию задачи не удовлетворяет, и следует рассматривать лишь окружность с центром O_2 . Теперь уже легко найти площадь S трапеции. Пользуясь соотношением между основаниями трапеции и диаметром вписанной в нее окружности $d = \sqrt{ab}$, мы получаем равенство

$$2 = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{4\sqrt{2} \cdot BC},$$

откуда $BC = \sqrt{2}/2$ и $S = ((AD + BC) \cdot 2)/2 = 9\sqrt{2}/2$.

В разобранной задаче возможность существования двух принципиально различных геометрических конфигураций была совершенно очевидна. Однако не всегда это так, и нужно обладать хорошим геометрическим воображением и проявлять достаточную осмотрительность, чтобы при выполнении чертежа «увидеть» все конфигурации, которые следует рассмотреть в решении.

Задача 4. Высота прямой призмы равна 1, ее основанием служит ромб со стороной 2 и острым углом 30° . Через сторону основания проведена секущая плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом в 60° . Найдите площадь сечения.

Решение. На экзамене многие поступающие, выполнив рисунок 6, дали примерно следующее «решение» этой задачи: «Пусть MN — линия пересечения секущей плоскости α с плоскостью грани DCC_1D_1 ; опустив перпендикуляр MK и AB , по теореме о трех перпендикулярах получим, что $KD \perp AB$. Поэтому $\angle MKD$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью основания, так что $\angle MKD = 60^\circ$. Тогда $MK = \frac{KD}{\cos 60^\circ} = \frac{AD \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 2$. Но MK — высота параллелограмма $AMNB$, полученного в сечении, и следовательно, искомая площадь $S = AB \cdot MK = 4$ ».

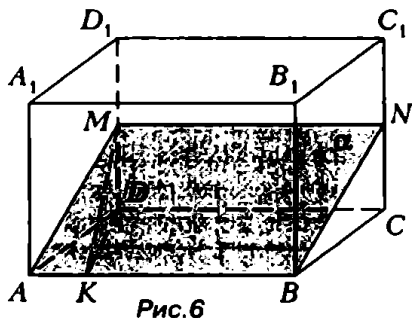


Рис. 6

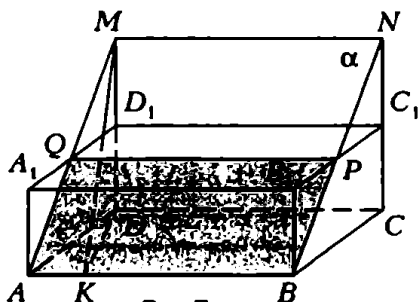


Рис. 7

В этом рассуждении есть существенный пробел: чертеж, на котором оно основано, выполнен при неявном предположении, что плоскость α пересекает прямоугольник DCC_1D_1 . Между тем при заданных числовых данных это вовсе не очевидно, более того — неверно: в действительности плоскость α «выходит» из данной призмы через верхнюю грань, а точка M лежит на продолжении ребра DD_1 . В самом деле, найдя так же, как и выше, что $MK = 2$ (заметим, что это вычисление не зависит от положения точки M на прямой DD_1), из треугольника MDK мы получим, что $MD = \sqrt{3}$, так что MD больше DD_1 . Следовательно, речь в задаче идет о конфигурации, указанной на рисунке 7, и искать надо площадь параллелограмма $AQPВ$, а не $AMNB$. Дальнейшее решение задачи не вызывает принципиальных затруднений, и мы предоставляем это читателям; искомая площадь $S = 4/\sqrt{3}$.

Еще большее внимание требуется при решении задач, в которых геометрическая конфигурация задается не числовыми, а

буквенными данными, т.е. своего рода геометрических задачах с параметрами. В этих задачах (так же, как и в алгебраических задачах с параметрами) и способ решения, и получаемый ответ могут существенно зависеть от соотношений между параметрами, определяющими конфигурацию.

Пусть, например, в разобранной только что задаче секущая плоскость проведена под углом φ к плоскости основания, а все остальные числовые данные — те же самые. Тогда в решении следует рассмотреть три случая:

- 1) точка M лежит на ребре DD_1 ;
- 2) точка M совпадает с D_1 ;
- 3) точка M лежит на продолжении ребра DD_1 .

Какой именно из указанных случаев имеет место, зависит от величины угла φ , и определить это можно, исходя из сравнения отрезков MD и D_1D . Независимо от расположения точки M на прямой DD_1 , ясно, что $MD = KD \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi$. Поэтому указанные случаи определяются условиями:

- 1) $\operatorname{tg} \varphi < 1$;
- 2) $\operatorname{tg} \varphi = 1$;
- 3) $\operatorname{tg} \varphi > 1$.

Таким образом, если $\varphi < 45^\circ$, то имеет место первый случай (рис. 6), и тогда $s = 2/\cos \varphi$. Если $\varphi > 45^\circ$, то имеет место третий случай (рис. 7), тогда $S = 2/\sin \varphi$. Что же касается случая $\varphi = 45^\circ$, то его нужно было бы рассмотреть на специальном чертеже, но фактически можно использовать и любой из имеющихся — так довольно часто бывает при рассмотрении «крайних» значений; в этом случае $S = 2\sqrt{2}$.

Окончательный ответ записывается в виде

$$S = \begin{cases} 2/\cos \varphi, & \text{если } \varphi < 45^\circ, \\ 2\sqrt{2}, & \text{если } \varphi = 45^\circ, \\ 2/\sin \varphi, & \text{если } \varphi > 45^\circ. \end{cases}$$

Можно, разумеется, включить второй случай в любой из двух других и записать ответ более компактно.

С аналогичной ситуацией мы встречаемся и в следующей задаче. Правда, окончательный ответ в ней от вида конфигурации не зависит и одинаков для всех значений параметра, однако промежуточные вычисления проводятся по-разному для различных конфигураций. Естественно, что решение, в котором рассмотрены не все геометрически различные случаи, не может считаться полноценным, хотя формально получается правильный ответ.

Задача 5. Шар с радиусом r касается плоскости P в точке A . Прямая l образует с плоскостью P угол φ , пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B . Найдите длину отрезка AB , если $AC = 2r$.

Решение. Изобразим конфигурацию, о которой идет речь в условии (рис.8). Из точки B опустим перпендикуляр BB_1 на плоскость P и проведем отрезок CB_1 ; ясно, что $\angle BCB_1 = \varphi$. Далее, $OA = OB = r$, а $CB = CA = 2r$ по свойству касательных к шару, проведенных из одной точки.

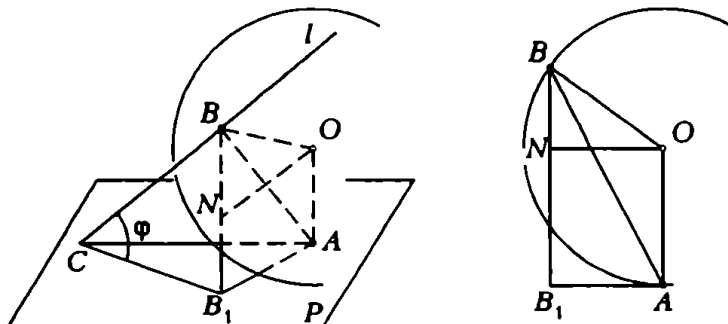


Рис.8

Искомый отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника BB_1A , катет BB_1 которого определяется из прямоугольного треугольника CB_1B : $BB_1 = 2r \sin \varphi$. Остается найти катет AB_1 . Прямые OA и BB_1 , перпендикулярные к плоскости P , лежат в одной плоскости. Проведем в ней прямую $ON \parallel AB_1$; тогда $AONB_1$ — прямоугольник, и следовательно, $AB_1 = ON$, $NB_1 = OA = r$. Так как

$$NB = BB_1 - NB_1 = 2r \sin \varphi - r,$$

то из треугольника ONB

$$ON^2 = OB^2 - NB^2 = 4r^2 \sin \varphi (1 - \sin \varphi),$$

а из треугольника BB_1A

$$AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{ON^2 + BB_1^2} = 2r \sqrt{\sin \varphi}.$$

Не следует, однако, думать, что задача решена. В самом деле, при вычислении отрезка NB мы существенно использовали тот факт, что точки B , N и B_1 расположены именно так, как это изображено на рисунке 8. Но из условия задачи вовсе не следует, что точка N лежит между B и B_1 ; точки N и B могут даже совпадать. Только рассмотрев все эти случаи, мы можем утверждать, что провели исчерпывающее решение задачи.

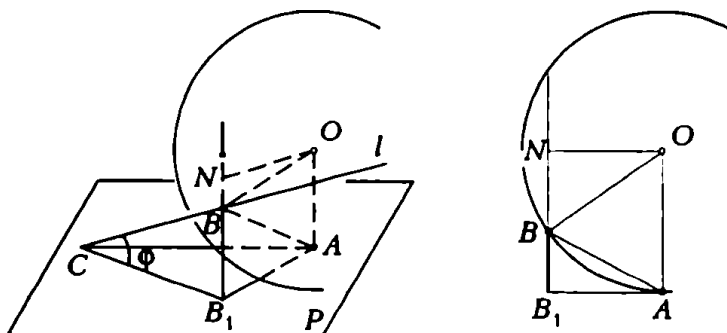


Рис.9

Если точка B лежит между N и B_1 (рис. 9), то

$$NB = NB_1 - BB_1 = r - 2r \sin \varphi,$$

а дальнейшее вычисление отрезков ON и AB проводится точно так же, как и выше; в результате мы приходим к той же формуле для отрезка AB . Если, наконец, точки N и B совпадают, то ясно, что $BB_1 = ON = r$, и $AB = r\sqrt{2}$. В этом случае в треугольнике CB_1B катет $BB_1 = r$ составляет половину гипотенузы $CB = 2r$, а потому $\varphi = 30^\circ$, т.е. $AB = 2r\sqrt{\sin \varphi}$.

Таким образом, равенство $AB = 2r\sqrt{\sin \varphi}$ справедливо при любых возможных значениях φ .

Решение этой задачи можно провести и с помощью рассуждений, не зависящих от конкретного расположения точек B , B_1 и N — попробуйте сделать это самостоятельно.

Рассмотренные задачи показывают, что тщательное выполнение чертежа имеет содержательное значение — правильно выполненный чертеж облегчает решение, а неправильный может привести к неверным выводам. В заключение заметим, что необходимо обращать внимание и на чисто техническую сторону — чертеж должен быть простым и понятным, рисовать его надо как можно более аккуратно (причем не только в чистовике, но и при черновом решении), хотя не следует впадать в крайность: геометрическая задача не есть задача по черчению, миллиметровой точности здесь не нужно. Обычно достаточно аккуратно сделать чертеж от руки, без использования чертежных инструментов (кроме, быть может, циркуля), обращая особое внимание на взаимное положение отдельных фигур. Конечно, навыки рисования от руки нужно вырабатывать у себя заранее, в процессе подготовки к экзаменам.

Упражнения

1. На плоскости даны четыре различные точки A, B, C, D такие, что $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Докажите, что $AD \perp BC$.

2. В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной a , а две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Определите радиус шара, вписанного в пирамиду.

3. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол φ . Определите расстояние от центра описанного шара до плоскости основания пирамиды и объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R .

4. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 1$, $BC = 2$ и угол ABC — тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна к стороне AB , а другая — к стороне BC . В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, причем $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. В угол A куба вписан шар радиусом $1/2$. Найдите радиус шара, вписанного в угол C куба и касающегося данного шара, если известно, что ребро куба равно $3/2$.

6. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, стороны AB и AC которого равны и образуют между собой угол α , а высота пирамиды совпадает с ребром SA и равна h . Дана вторая треугольная пирамида, имеющая ту же вершину S , а ее основанием является треугольник, вершины которого лежат на разных сторонах треугольника ABC . Найдите объем второй пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

7. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α . Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причем точка касания является серединой основания. Определите радиус второй окружности. Если решение не единственно, рассмотрите все возможности.

8. В треугольнике ABC известно: $AC = 1$, $BC = \sqrt{7}$, $\angle A = 120^\circ$. На продолжении стороны CA взята точка M так, что BM является высотой треугольника ABC . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и M и касающейся в точке M окружности, проходящей через точки M, B и C .

9. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга, причем каждая из них касается также трех сторон параллелограмма. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

10. Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha$, причем $\alpha < \pi/2$ и $\angle QAC = \beta$. Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K . Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AK и в одной полуплоскости относительно прямой AD . Найдите величину угла KAD .

Среди углов, которые можно рассматривать в правильной пирамиде, наиболее часто в задачах встречаются следующие четыре: угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды; угол наклона боковой грани к плоскости основания; плоский угол при вершине пирамиды; двугранный угол при боковом ребре пирамиды. Условимся обозначать величины названных углов буквами α , β , γ и δ соответственно. Все эти углы, называемые иногда основными, лежат в разных плоскостях. В этой статье мы объясним, как, зная величину любого из основных углов, можно определить величины всех остальных основных углов. Мы отдельно рассмотрим случаи правильных четырехугольной, треугольной и n -угольной пирамид.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис.1) $\angle SCO = \angle SDO = \alpha$, $\angle CSD = \gamma$, $\angle SFO = \beta$. В грани SCD проводим $DE \perp SC$ и соединяем точку E с вершиной основания B . Нетрудно доказать, что $\triangle BEC$ равен $\triangle DEC$. Из этого следует, что $BE = ED$ и $\angle BEC = \angle DEC = \pi/2$. Таким образом, $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла при ребре SC , т.е. $\angle BED = \delta$. Отрезок OE — медиана равнобедренного треугольника BED , следовательно, и биссектриса, и высота этого треугольника. Поэтому $\angle OED = \delta/2$.

Отрезок OP принадлежит линии пересечения плоскостей линейных углов: $\angle BED$ и $\angle SFO$. Плоскость линейного угла перпендикулярна граниям двугранного угла, поэтому каждая из плоскостей BED и SFO перпендикулярна плоскости SCD . Линия пересечения двух плоскостей, каждая из

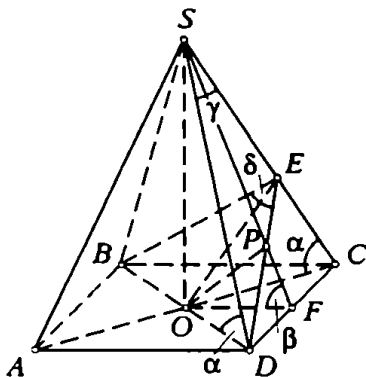


Рис. 1

которых перпендикулярна третьей плоскости, перпендикулярна этой третьей плоскости (докажите это самостоятельно). Поэтому $OP \perp SCD$. Таким образом, треугольники OPF и OPD — прямоугольные и $\angle DOP = \delta/2$.

Перейдем теперь к выводу формул. Мы будем пользоваться следующим общим приемом. Обозначим через x длину отрезка в правильной пирамиде, который входит как в прямоугольный треугольник, содержащий данный угол, так и в треугольник, содержащий искомый угол; выразим, далее, через x и функции данного угла одну из двух других сторон в том треугольнике, который содержит искомый угол, затем найдем функцию искомого угла.

Утверждение 1.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

Доказательство. Положим $SO = x$. Из $\triangle SOF$ имеем $OF = x \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle OFD$ имеем $OD = x\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle SOD$ имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{x\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \beta$.

Утверждение 2.

$$\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Доказательство. Положим $SD = x$. Из $\triangle SDF$ имеем $DF = x \sin \frac{\gamma}{2}$; из $\triangle OFD$ имеем $OD = x\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}$; из $\triangle SOD$ имеем $\cos \alpha = \frac{x\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{x} = \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

Утверждение 3.

$$\sin \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}. \quad (3)$$

Доказательство. Положим $OE = x$. Из $\triangle OED$ имеем $OD = x \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$; поскольку $OC = OD = x \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$, из $\triangle EOC$ имеем $\sin \alpha = \frac{x}{x \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$.

Вывод трех следующих формул мы предоставляем читателю.

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}; \quad (4)$$

$$\sin \beta = \sqrt{2} \cos \frac{\delta}{2}; \quad (5)$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Для правильной треугольной пирамиды мы выпишем аналогичные формулы, опустив их доказательства.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta; \quad (7)$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\gamma}{2}; \quad (8)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}; \quad (9)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}; \quad (10)$$

$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\delta}{2}; \quad (11)$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Формулы для правильной n -угольной пирамиды требуются реже, но мы приведем и их, снова опустив доказательства.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \cos \frac{\pi}{n}; \quad (13)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}; \quad (14)$$

$$\sin \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}; \quad (15)$$

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}; \quad (16)$$

$$\sin \beta = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}; \quad (17)$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2} = \cos \frac{\pi}{n}. \quad (18)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулы (1) – (12) получаются из формул (13) – (18), если в последние подставить вместо n соответственно 4 и 3.

Покажем, как полученные формулы применяются к решению задач.

Задача 1. *Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H , а двугранный угол при боковом ребре в 3 раза больше двугранного угла при ребре основания.*

Решение. Согласно условию $SO = H$ (см. рис.1). Из $\triangle SFO$ получаем $OF = H \operatorname{ctg} \beta$. Следовательно, $AD = 2H \operatorname{ctg} \beta$. Находим объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} (2H \operatorname{ctg} \beta)^2 H = \frac{4}{3} H^3 \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

Заменив в формуле (5) угол δ углом 3β , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{2} \cos \frac{3\beta}{2} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \left(4 \cos^3 \frac{\beta}{2} - 3 \cos \frac{\beta}{2} \right) \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\beta}{2} = \\ &= 4\sqrt{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{\beta}{2} - 1 = 0, \end{aligned}$$

откуда $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (отрицательный корень не годится), так что $\operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{\sqrt{7}}$ и, наконец,

$$V = \frac{4}{3} H^3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{12}{7} H^3.$$

Задача 2. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найдите этот угол.

Решение. Положив в формуле (14) $n = 6$ и $\gamma = \alpha$, получаем тригонометрическое уравнение, из которого находим искомый угол:

$$\cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(отрицательный корень, разумеется, посторонний). Следовательно,

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен r , а угол между плоскостями боковых граней равен φ . Определите длину ребра куба, объем которого в $\sqrt{3}$ раз больше объема данной пирамиды.

Решение. Если a — сторона основания, то $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, т.е. $a = 2r\sqrt{3}$. Тогда площадь основания пирамиды

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3r^2 \sqrt{3}.$$

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в этот

треугольник, так что $OB = 2r$. Из $\triangle SBO$ получаем $SO = 2r \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 2). Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3r^2 \sqrt{3} \cdot 2r \operatorname{tg} \alpha = 2r^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Обозначив искомую длину ребра куба через x , составляем уравнение

$$x^3 = \sqrt{3} \cdot 2r^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$x = r \sqrt[3]{6 \operatorname{tg} \alpha}.$$

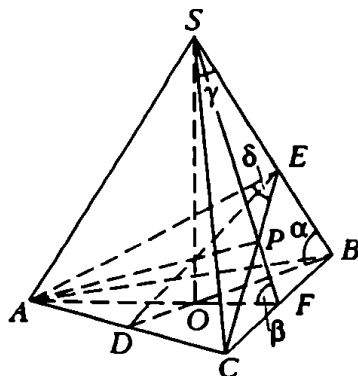


Рис.2

Выразим теперь $\operatorname{tg} \alpha$ через функции угла φ с помощью формулы (9):

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

так что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sqrt{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6} \right)}}.$$

Поэтому

$$x = r \sqrt[3]{6 \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sqrt{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6} \right)}}} = r \frac{\sqrt{3 \cos \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt[6]{\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6} \right)}}.$$

Упражнения

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , угол между смежными боковыми гранями равен α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине, равным углу наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

3. Найдите величину двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в сферу, зная, что она равна величине угла, под которым видно из центра сферы боковое ребро пирамиды.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между перпендикулярами AL и AM , опущенными из точки A на боковые грани SBC и SCD , равен α . Найдите объем пирамиды, если объем куба, ребро которого равно стороне основания пирамиды, равен v .

5. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно l , а угол наклона боковых граней к плоскости основания равен α .

6. Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен Q . Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями, равен α . Найдите длину стороны основания пирамиды.

7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , двугранный угол между боковыми гранями равен α . Вычислите объем и боковую поверхность пирамиды.

8. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S , а плоский угол при вершине боковой грани равен α . Найдите высоту пирамиды.

9. В правильной четырехугольной пирамиде сумма величин двугранных углов между смежными и противоположными боковыми гранями равна 180° . Найдите эти углы.

10. В правильной n -угольной пирамиде сторона основания равна a и двугранный угол при боковом ребре равен α . Найдите объем пирамиды.

В этой статье рассматривается несколько геометрических задач, для решения которых необходимо вычислить те или иные расстояния или углы в пространстве (эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в разные вузы). Задачи такого типа удобно решать с помощью скалярного произведения векторов. Основной метод решения заключается в том, что в пространстве выбирается подходящий базис и составляется *таблица умножения* — таблица скалярных произведений векторов этого базиса. Имея такую таблицу и зная разложения векторов в выбранном базисе, вычислить длины этих векторов и углы между ними уже легко. Мы начнем с простой задачи, где этот метод напрашивается сам собой, а затем перейдем к более сложным задачам, продемонстрировав на них все основные случаи.

Таблица 1

Задача 1. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра AD , точка O — центр треугольника ABC , точка N — середина ребра AB и точка K — середина ребра CD . Найдите угол между прямыми MO и KN .

	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
\vec{a}	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
\vec{b}	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
\vec{c}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Решение. Примем длину ребра тетраэдра за единицу и выберем в качестве базиса векторы $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса (табл. 1). Разложим векторы \vec{MO} и \vec{KN} по векторам \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$\vec{MO} = \vec{DO} - \vec{DM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}),$$

$$\vec{KN} = \vec{DN} - \vec{DK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).$$

Угол φ между прямыми MO и KN вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{MO} \cdot \vec{KN}|}{|\vec{MO}| |\vec{KN}|}.$$

Найдем $\vec{MO} \cdot \vec{KN}$, $|\vec{MO}|$ и $|\vec{KN}|$, пользуясь таблицей 1:

$$\vec{MO} \cdot \vec{KN} = \frac{1}{12}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{12};$$

$$|\vec{MO}| = \frac{1}{6} \sqrt{(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})^2} = \frac{1}{2}; \quad |\vec{KN}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Однако условие задачи не всегда позволяет выбрать базис с полностью определенной таблицей умножения. В этом случае нужно попытаться составить уравнение относительно недостающего элемента.

Задача 2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a , точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $5a/6$. Определите высоту призмы.

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AA}_1 = \vec{m}$, $\vec{AB} = \vec{n}$, $\vec{AC} = \vec{p}$ (рис. 1). Пусть $h = |\vec{m}|$. Таблица 2 — это таблица умножения для базиса $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$.

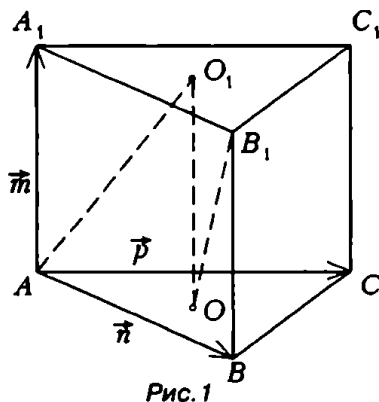


Рис. 1

Таблица 2

	\vec{m}	\vec{n}	\vec{p}
\vec{m}	h^2	0	0
\vec{n}	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$
\vec{p}	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Ортогональная проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла φ между прямыми AO_1 и B_1O . Чтобы вычислить $|\vec{AO}_1|$ и $\cos \varphi$, разложим векторы \vec{AO}_1 и \vec{B}_1O в базисе $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$:

$$\vec{AO}_1 = \frac{1}{3}(\vec{AA}_1 + \vec{AB}_1 + \vec{AC}_1) = \frac{1}{3}(\vec{m} + \vec{m} + \vec{n} + \vec{m} + \vec{p}) = \frac{1}{3}(3\vec{m} + \vec{n} + \vec{p});$$

$$\vec{B}_1O = \vec{AO} - \vec{AB}_1 = \frac{1}{3}(\vec{n} + \vec{p}) - (\vec{m} + \vec{n}) = \frac{1}{3}(-3\vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}).$$

Используя таблицу 2, находим:

$$|\vec{AO}_1| = |\vec{B}_1O| = \frac{1}{3}\sqrt{9h^2 + 3a^2}, \quad \vec{AO}_1 \cdot \vec{B}_1O = -\frac{1}{6}(6h^2 + a^2),$$

$$\cos \varphi = \frac{6h^2 + a^2}{2(3h^2 + a^2)}.$$

Поскольку $|\vec{AO}_1| \cdot \cos \varphi = \frac{5a}{6}$, мы получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{9h^2 + 3a^2}(6h^2 + a^2)}{6(3h^2 + a^2)} = \frac{5a}{6}.$$

Отсюда $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Можно выделить четыре основных типа задач на вычисление расстояний и углов.

1. Расстояние от точки до прямой.

Дано: точка M ; прямая l с направляющим вектором \vec{a} , точка A , принадлежащая прямой l ; $\vec{AM} = \vec{m}$.

Найти: расстояние от точки M до прямой l .

(Векторы \vec{a} и \vec{m} в условии задачи даны в том смысле, что известны их разложения в некотором базисе с заданной таблицей умножения.)

Приведем схему решения этой задачи.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на прямую l (рис. 2). Тогда $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = x\vec{a} - \vec{m}$. Незвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности векторов \vec{MN} и \vec{a} : $(x\vec{a} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0$. Искомое

расстояние $|\vec{MN}| = \sqrt{(x\vec{a} - \vec{m})^2}$.

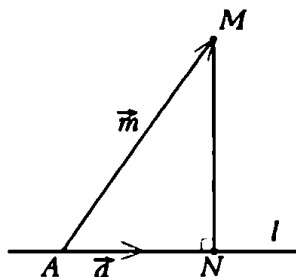


Рис.2

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA=4$) точка D лежит на ребре SC , $CD=3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

Решение. Выберем базис из векторов $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SD} = \vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса, обозначив через φ плоский угол при вершине пирамиды (табл. 3). По условию расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Вычислив это расстояние с помощью таблицы 3, мы получим уравнение, позволяющее найти $\cos \varphi$.

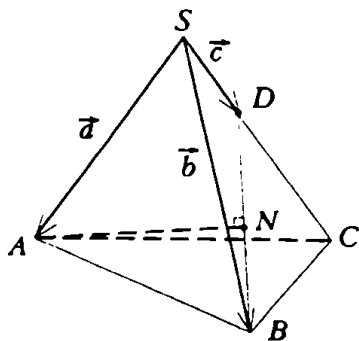


Рис. 3

Таблица 3

	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
\vec{a}	16	$16 \cos \varphi$	$4 \cos \varphi$
\vec{b}	$16 \cos \varphi$	16	$4 \cos \varphi$
\vec{c}	$4 \cos \varphi$	$4 \cos \varphi$	1

Пусть N — проекция точки A на прямую BD (рис. 3). Тогда $\vec{AN} = \vec{DN} - \vec{DA} = x \vec{DB} - \vec{DA} = x(\vec{b} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{c}) = -\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c}$. Так как векторы \vec{AN} и \vec{DB} перпендикулярны, получаем $(-\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c})(\vec{b} - \vec{c}) = 0$. Используя таблицу 3, после упрощений находим:

$$(17x - 1) - 8(x + 1)\cos \varphi = 0. \quad (1)$$

Вычислим теперь длину вектора \vec{AN} :

$$|\vec{AN}|^2 = (-\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c})^2 = 17x^2 - 2x + 17 - 8(x+1)^2 \cos \varphi.$$

Так как $|\vec{AN}|^2 = 4$,

$$17x^2 - 2x + 13 - 8(x+1)^2 \cos \varphi = 0. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем $x = 7/9$. Поэтому $\cos \varphi = 55/64$.

Найдем теперь длину отрезка SO — высоту пирамиды. Так как O — центр треугольника ABC ,

$$\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}),$$

откуда

$$|\vec{SO}| = \frac{1}{3} \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{3} \sqrt{48 + 96 \cos \varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{58}.$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды, вычислим $|\vec{AB}|^2$:

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{9}{2}.$$

Теперь искомый объем

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\vec{AB}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot |\vec{SO}| = \frac{3\sqrt{174}}{16}.$$

2. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Дано: плоскость α с базисом (\vec{a}, \vec{b}) , точка A , принадлежащая плоскости α , точка M , не лежащая в плоскости α , $\vec{AM} = \vec{m}$.

Найти: расстояние от точки M до плоскости α и угол между прямой AM и плоскостью α .

Схема решения этой задачи такова.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на плоскость α (рис. 4). Тогда $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора \vec{MN} векторам \vec{a} и \vec{b} :

$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$

Зная x и y , находим расстояние от точки M до плоскости α , равное

$$\sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m})^2}.$$

Если $x\vec{a} + y\vec{b} \neq 0$, то угол между прямой AM и плоскостью α равен углу между векторами \vec{m} и $x\vec{a} + y\vec{b}$, а если $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$, то прямая AM перпендикулярна плоскости α .

Задача 4. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом $A = 60^\circ$. Все ребра призмы имеют длину a . Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость $DA_1 C_1$, а точка L — ортогональной проекцией

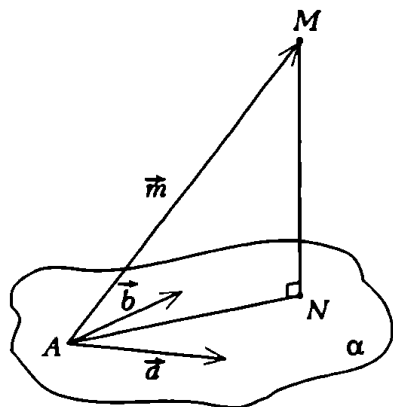


Рис.4

точки K на плоскость DD_1C_1C . Найдите объем пирамиды $DCLK$.

Решение. Примем за основание пирамиды $DCLK$ треугольник CDL , лежащий в плоскости DD_1C_1C . Тогда отрезок KL — высота пирамиды (рис. 5). Следовательно,

$$V_{KCDL} = \frac{1}{3} S_{CDL} \cdot KL = \frac{1}{6} DC \cdot LM \cdot KL,$$

где M — ортогональная проекция точки L на прямую DC .

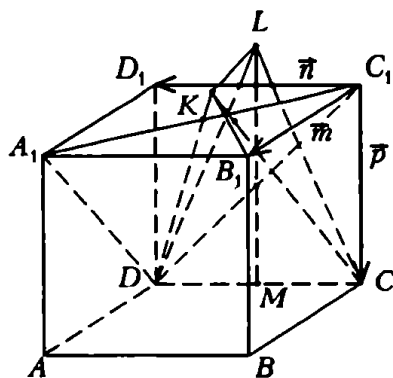


Рис.5

Таблица 4

	\vec{m}	\vec{n}	\vec{p}
\vec{m}	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
\vec{n}	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
\vec{p}	0	0	a^2

Выберем в качестве базиса векторы $\vec{C_1B_1} = \vec{m}$, $\vec{C_1D_1} = \vec{n}$, $\vec{C_1C} = \vec{p}$ и заполним таблицу 4 — таблицу умножения для этого базиса.

Далее,

$$\begin{aligned} \vec{B_1K} &= \vec{C_1K} - \vec{C_1B_1} = x\vec{C_1A_1} + y\vec{C_1D} - \vec{C_1B_1} = \\ &= x(\vec{m} + \vec{n}) + y(\vec{n} + \vec{p}) - \vec{m} = (x-1)\vec{m} + (x+y)\vec{n} + y\vec{p}. \end{aligned}$$

Так как вектор $\vec{B_1K}$ перпендикулярен векторам $\vec{C_1A_1}$ и $\vec{C_1D}$, получаем систему

$$\vec{B_1K} \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = 0, \quad \vec{B_1K} \cdot (\vec{n} + \vec{p}) = 0.$$

Заменив вектор $\vec{B_1K}$ его разложением в базис $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$ и воспользовавшись таблицей 4, придем после упрощений к системе уравнений $2x+y=1$, $3x+4y=1$, откуда $x=3/5$, $y=-1/5$.

$$\text{Следовательно, } \vec{C_1K} = \frac{3}{5}(\vec{m} + \vec{n}) - \frac{1}{5}(\vec{n} + \vec{p}) = \frac{1}{5}(3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \vec{KL} &= \vec{C_1L} - \vec{C_1K} = z\vec{C_1D_1} + t\vec{C_1C} - \vec{C_1K} = \\ &= z\vec{n} + t\vec{p} - \frac{1}{5}(3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}) = \frac{1}{5}(-3\vec{m} + (5z-2)\vec{n} + (5t+1)\vec{p}). \end{aligned}$$

Так как $\vec{KL} \cdot \vec{n} = 0$ и $\vec{KL} \cdot \vec{p} = 0$, то $-\frac{3}{2} + 5z - 2 = 0$, откуда $z = 7/10$, и $5t + 1 = 0$, откуда $t = -1/5$. Следовательно,

$$\vec{KL} = \frac{1}{5} \left(-3\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n} \right) = \frac{3}{10} \left(-2\vec{m} + \vec{n} \right).$$

Теперь можно найти высоту пирамиды $KCDL$:

$$KL = \frac{3}{10} \sqrt{\left(-2\vec{m} + \vec{n} \right)^2} = \frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Осталось найти \vec{LM} :

$$\begin{aligned} \vec{LM} &= \vec{CM} - \vec{CL} = u\vec{CD} - \left(\vec{C_1L} - \vec{C_1C} \right) = \\ &= u\vec{n} - z\vec{n} - t\vec{p} + \vec{p} = \left(u - \frac{7}{10} \right) \vec{n} + \frac{6}{5} \vec{p}. \end{aligned}$$

Так как $\vec{LM} \cdot \vec{n} = 0$, то $u = 7/10$, откуда $\vec{LM} = (6/5)\vec{p}$, $|\vec{LM}| = 6a/5$. Таким образом,

$$V_{KCDL} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{6a}{5} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{10} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}.$$

3. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми.

Дано: прямая l_1 с направляющим вектором \vec{a}_1 , точка A_1 , принадлежащая прямой l_1 ; прямая l_2 с направляющим вектором \vec{a}_2 , точка A_2 , принадлежащая прямой l_2 ; $\vec{A_1A_2} = \vec{m}$.

Найти: расстояние и угол между прямыми l_1 и l_2 .

Задачи этого типа решаются по следующей схеме.

Косинус угла φ между прямыми l_1 и l_2 находятся по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}.$$

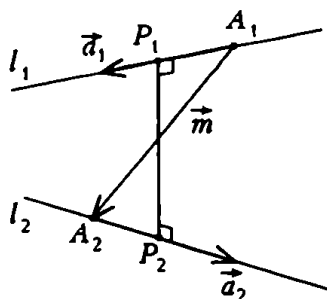


Рис.6

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2 , т.е. длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$, рисунок 6), представим вектор $\vec{P_1P_2}$ в виде $\vec{P_1P_2} = \vec{P_1A_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2P_2} = x\vec{a}_1 + \vec{m} + y\vec{a}_2$. Неизвестные коэффициенты x , y находятся

из условий перпендикулярности вектора $\vec{P_1P_2}$ векторам $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$:

$$\begin{cases} (x\vec{a_1} + y\vec{a_2} - \vec{m}) \cdot \vec{a_1} = 0, \\ (x\vec{a_1} + y\vec{a_2} - \vec{m}) \cdot \vec{a_2} = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние — длина вектора $\vec{P_1P_2}$, т.е. $\sqrt{(x\vec{a_1} + y\vec{a_2} - \vec{m})^2}$.

Задача 5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

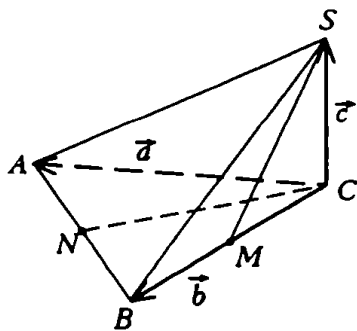


Рис.7

Таблица 5

	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
\vec{a}	32	16	0
\vec{b}	16	32	0
\vec{c}	0	0	4

Решение. Пусть M и N — середины ребер BC и AB (рис. 7). Выберем в качестве базиса векторы $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{CS} = \vec{c}$. Таблица умножения для этого базиса — это таблица 5. Найдём угол φ между прямыми SM и CN :

$$\vec{SM} = \vec{CM} - \vec{CS} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c}); \quad \vec{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Вычислим $\vec{SM} \cdot \vec{CN}$, $|\vec{SM}|$, $|\vec{CN}|$:

$$\vec{SM} \cdot \vec{CN} = 12, |\vec{SM}| = 2\sqrt{3}, |\vec{CN}| = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \varphi = \frac{12}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Вычислим теперь расстояние между прямыми SM и CN , т.е. длину их общего перпендикуляра PQ ($P \in SM$, $Q \in CN$):

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= x\vec{SM} + y\vec{CN} + \vec{SC} = \frac{x}{2}(\vec{b} - 2\vec{c}) + \frac{y}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = \\ &= \frac{1}{2}(y\vec{a} + (x+y)\vec{b} - (2x+2)\vec{c}).\end{aligned}$$

Из условия перпендикулярности вектора \vec{PQ} векторам $\vec{b} - 2\vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ получаем систему уравнений

$$3x + 3y = -1, \quad x + 2y = 0,$$

откуда $x = -2/3$, $y = 1/3$.

Следовательно,

$$\vec{PQ} = \frac{1}{6}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}), \quad PQ = \frac{1}{6}\sqrt{(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4. Угол между плоскостями.

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми. Действительно, пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 8). Через какую-нибудь точку, не лежащую на прямой c , проведем прямые a и b , перпендикулярные плоскостям α и β соответственно. Тогда плоскость, проходящая через прямые a и b , пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1 , перпендикулярным прямой c (см. рис. 8). Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1 , который, в свою очередь, равен углу между прямыми a и b (так как прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости и $a \perp a_1$, $b \perp b_1$).

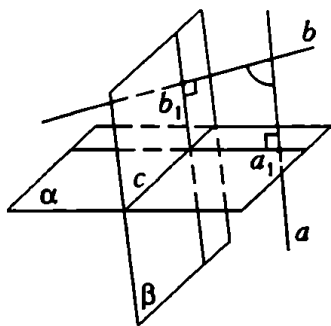


Рис.8

Таким образом, задача нахождения угла между плоскостями сводится к вычислению угла между прямыми.

Задача 6. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC , плоскость β параллельна прямым SC и AB . Определите величину угла между плоскостями α и β .

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AS} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$. Таблица 6 — это таблица умножения для векторов

Таблица 6

	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}
\vec{a}	3	0	0
\vec{b}	0	1	$\frac{1}{2}$
\vec{c}	0	$\frac{1}{2}$	1

этого базиса. Если \vec{m} и \vec{n} — ненулевые векторы, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно, а φ — угол между этими плоскостями, то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|}.$$

В качестве вектора \vec{m} можно взять любой ненулевой вектор, удовлетворяющий условиям $\vec{SB} \cdot \vec{m} = 0$, $\vec{AC} \cdot \vec{m} = 0$.

Запишем вектор \vec{m} в виде $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Так как $\vec{SB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\vec{b} - \vec{a})(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0, \\ \vec{c}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0. \end{cases}$$

С помощью таблицы 6 приводим эту систему к виду $6x - 2y - z = 0$, $y + 2z = 0$.

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. Это объясняется тем, что вектор \vec{m} условием $\vec{m} \perp \alpha$ не определен однозначно. Решение такой системы сводится к выражению двух неизвестных через третье. Выразим x и y через z : $y = -2z$, $x = -(1/2)z$.

Положив теперь, например, $z = -2$, найдем x и y : $x = 1$, $y = 4$. Вектор $\vec{m} = \vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ — один из ненулевых векторов, перпендикулярных плоскости α .

Аналогично будем искать ненулевой вектор $\vec{n} = t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$, перпендикулярный плоскости β : $\vec{SC} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$;

$$\begin{cases} (\vec{c} - \vec{a})(t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) = 0, \\ \vec{b}(t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) = 0, \end{cases}$$

так что

$$t = -\frac{1}{2}u, \quad v = -2u.$$

Можно взять $u = -2$. Тогда $v = 4, t = 1$, так что $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$.

(Выражение для вектора \vec{n} можно было получить из выражения для вектора \vec{m} , заметив, что условие, задающее плоскость β , получается из условия, задающего плоскость α , перестановкой точек B и C .)

Теперь вычисляем $\cos \varphi$:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) = -3,$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{(\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c})^2} = \sqrt{15}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{15}, \quad \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $\varphi = \arccos \frac{1}{5}$.

Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC , а точка M — середина стороны AD . Найдите AD , если $AK=6$, $AM=3$ и $\angle KAM=60^\circ$.
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC , а точка E — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми MN и DE .
3. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , длины катетов AB и AC которого равны a . Боковые ребра AA' , BB' , CC' образуют с плоскостью основания углы в 60° , а диагональ BC' боковой грани $CB'B'C'$ перпендикулярна ребру AC . Найдите объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a , длина бокового ребра равна $a/2$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C , а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B . Найдите объем пирамиды A_1B_1DE .
5. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a , боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC , параллельные плоскости SAD .
 - а) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $DM:DB=1:3$. Найдите его длину.
 - б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

В.Матизен, В.Дубровский

В этой статье речь пойдет главным образом о признаках принадлежности тетраэдра к тому или другому классу. Примеры таких классов — правильные треугольные пирамиды и правильные тетраэдры, которые можно считать аналогами, соответственно, равнобедренных и равносторонних треугольников. Но в отличие от планиметрии, где можно назвать еще разве что прямоугольные треугольники, в стереометрии интересные классы тетраэдров этим отнюдь не исчерпываются. О двух таких классах неоднократно рассказывалось в «Кванте»: это классы *равногранных* и *каркасных* тетраэдров. В класс равногранных тетраэдров входят тетраэдры, все грани которых равны между собой. В класс каркасных тетраэдров — тетраэдры, все ребра которых касаются некоторой сферы.

ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИЙ ТЕТРАЭДР

В отличие от треугольника, высоты которого всегда пересекаются в одной точке — *ортоцентре*, не всякий тетраэдр обладает аналогичным свойством (рис.1). Тетраэдр, высоты которого

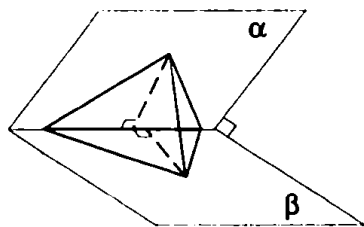


Рис.1

пересекаются в одной точке, называется *ортоцентрическим*. Мы начнем изучение ортоцентрических тетраэдров с необходимых и достаточных условий ортоцентричности, каждое из них можно принять за определение ортоцентрического тетраэдра.

Итак, мы докажем эквивалентность следующих свойств тетраэдра:

- O1. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.
- O2. Основания высот тетраэдра являются ортоцентрами граней.

ОЗ. Каждые два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны.

О4. Суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны.

О5. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, равны (эти отрезки называются бимедианами).

О6. Произведения косинусов противоположных двугранных углов равны.

О7. Сумма квадратов площадей граней вчетверо меньше суммы квадратов произведений противоположных ребер.

Обозначим через a, b, c, a_1, b_1, c_1 ребра тетраэдра $ABCD$ ($a = BC, a_1 = DA, b = CA, \dots$; рис. 2), через m_a, m_b, m_c — бимедианы (m_a соединяет середины ребер a и a_1 и т.д.); те же буквы обозначают длины соответствующих отрезков — из контекста будет ясно, что имеется в виду — отрезок или его длина. Величины двугранных углов тетраэдра при ребрах a, b, \dots обозначим так: \hat{a}, \hat{b}, \dots . Сначала рассмотрим тетраэдр, который является ортоцентрическим как бы «наполовину», а именно, докажем равносильность следующих условий:

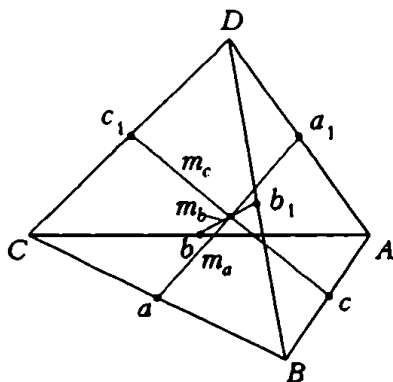


Рис.2

О1°. Высоты AA_1 и DD_1 пересекаются.

О2°. Точка D_1 (проекция вершины D на грань ABC) лежит на высоте грани ABC , проведенной из вершины A (или на ее продолжении).

О3°. Ребра BC и AD (a и a_1) перпендикулярны.

О4°. Бимедианы m_b и m_c равны.

О5°. $b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$.

О6°. $\cos \hat{b} \cdot \cos \hat{b}_1 = \cos \hat{c} \cdot \cos \hat{c}_1$.

Установить, что $O1^\circ \Leftrightarrow O2^\circ \Leftrightarrow O3^\circ$, совсем легко: проектируя прямые AA_1 и AD на грань ABC , мы из теоремы о трех перпендикулярах получим, что каждое из этих трех утверждений эквивалентно перпендикулярности прямых AD_1 и BC (или, возможно, совпадению точек D_1 и A).

Теперь докажем, что $O3^\circ \Leftrightarrow O4^\circ \Leftrightarrow O5^\circ$. Заметим, что каждые две бимедианы являются диагоналями параллелограмма (рис. 3), стороны которого, будучи средними линиями граней,

параллельны двум противоположным ребрам тетраэдра и равны по длине половинам этих ребер. Условия $O3^\circ$ и $O4^\circ$, т.е. $a \perp a_1$ и $m_b = m_c$, равносильны тому, что соответствующий параллелограмм — прямоугольник. Запишем для двух других аналогичных параллелограммов известное равенство параллелограмма (сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей): $b^2 + b_1^2 = 2(m_c^2 + m_a^2)$, $c^2 + c_1^2 = 2(m_a^2 + m_b^2)$. Из этих равенств сразу следует, что $O4^\circ \Leftrightarrow O5^\circ$.

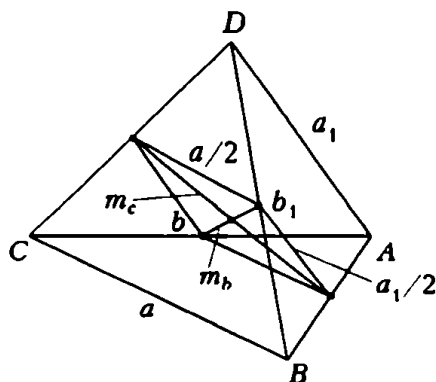


Рис.3

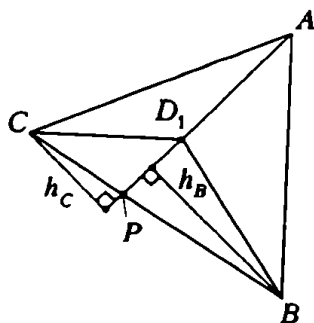


Рис.4

Для доказательства того, что $O6^\circ \Leftrightarrow O1^\circ$, рассмотрим точки P и P' пересечения плоскостей ADD_1 и ADA_1 с прямой BC . Отношение $k(P) = BP:PC$ равно отношению $S_{AD_1B}:S_{AD_1C}$ площадей треугольников AD_1B и AD_1C (рис. 4). А так как эти треугольники являются проекциями граней ADB и ADC на плоскость ABC , для $k(P)$ получаем:

$$k(P) = \frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} \cdot \frac{\cos \hat{c}}{\cos \hat{b}}.$$

(Чтобы охватить и случай, когда угол \hat{b} или угол \hat{c} — тупой, будем под $k(P)$ понимать отношение *направленных* отрезков: $BP = k(P) \cdot PC$. Для точки P' справедлива аналогичная формула:

$$k(P') = \frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} \cdot \frac{\cos \hat{b}_1}{\cos \hat{c}_1}.$$

Условие $O1^\circ$ эквивалентно совпадению точек P и P' или равенству $k(P) = k(P')$, которое легко превратить в $O6^\circ$.

Из равносильности свойств $O1^\circ$ – $O6^\circ$ моментально следует равносильность $O1$ – $O6$. Заминка может возникнуть только, когда мы будем выводить $O1$ из какого-либо другого признака ортоцентричности. Из каждого из свойств $O2$ – $O6$ получается лишь, что для любой пары высот выполняется свойство $O1^\circ$ (т.е.

любые две высоты пересекаются). Но отсюда уже следует $O1$, потому что, как легко видеть, несколько попарно пересекающихся прямых, не лежащих в одной плоскости, всегда пересекаются в одной точке.

Остается еще условие $O7$. Заметим, что если два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны, то их произведение, очевидно, равно учетверенной площади параллелограмма с вершинами в серединах остальных ребер; если же два противоположных ребра не перпендикулярны, то их произведение больше этой величины. Поэтому эквивалентность $O3$ и $O7$ следует из утверждения задачи М1070 «Задачника «Кванта», согласно которому сумма квадратов площадей граней тетраэдра вчетверо больше суммы квадратов площадей трех таких параллелограммов.

Условия $O1$, $O2$, $O3$ можно заменить на формально более слабые. Докажите, что

1. В $O2$ можно ограничиться только одной высотой, в $O3$ — двумя парами противоположных ребер, а в $O1$ потребовать, чтобы одна из высот пересекалась с двумя другими.

Еще несколько свойств ортоцентрического тетраэдра связаны с общими перпендикулярами его скрещивающихся ребер. По аналогии с бимедианами мы будем называть их *бивысотами*. Докажите, что

2. Если каждая бивысота пересекается с одной из высот тетраэдра, то он ортоцентрический.

3. В ортоцентрическом тетраэдре бивысоты пересекаются в одной точке (в ортоцентре).

А что можно сказать о тетраэдре, бивысоты которого пересекаются в одной точке? Верно ли, что он будет ортоцентрическим?

Некоторые свойства ортоцентрического тетраэдра удобно доказывать

С ПОМОЩЬЮ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Зададим направления на ребрах и бимедианах тетраэдра $ABCD$, как показано на рисунке 5; получившиеся векторы будем обозначать теми же буквами: $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{a}_1 = \vec{DA}$ и т.д. Выпишем несколько полезных тождеств, справедливых для любых четырех точек A, B, C, D :

$$\vec{a} \cdot \vec{a}_1 + \vec{b} \cdot \vec{b}_1 + \vec{c} \cdot \vec{c}_1 = 0; \quad (1)$$

$$2\vec{m}_a = \vec{b}_1 - \vec{b} = \vec{c}_1 + \vec{c}; \quad (2)$$

$$m_a^2 - m_b^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}_1; \quad (3)$$

$$2\vec{c} \cdot \vec{c}_1 = b^2 + b_1^2 - a^2 - a_1^2; \quad (4)$$

$$4m_a^2 = b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2. \quad (5)$$

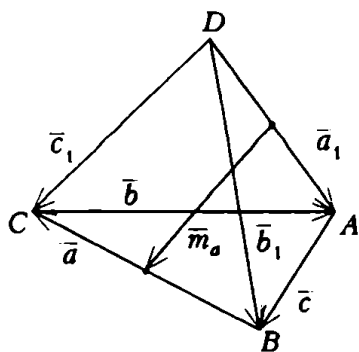


Рис.5

Доказательства этих тождеств сводятся к несложным алгебраическим преобразованиям, и мы оставляем их читателям. Вот два примера геометрических следствий этих тождеств: из (1) вытекает, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (возьмите в качестве D точку пересечения двух высот треугольника ABC); из (3), (4) и (5) — равносильность условий ОЗ, О4 и

О5 ортоцентричности тетраэдра. Другие примеры можно найти среди следующих задач.

Докажите, что

4. Каждое из следующих утверждений можно взять за определение ортоцентрического тетраэдра:

а) $\vec{a} \cdot \vec{a}_1 = \vec{b} \cdot \vec{b}_1 = \vec{c} \cdot \vec{c}_1$,

б) углы между противоположными ребрами равны,

в) $\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = \vec{c}_1 \cdot \vec{a}_1$.

5. В ортоцентрическом тетраэдре плоские углы при трех вершинах острые, а при четвертой — либо все острые, либо все тупые, либо все прямые, при этом все двугранные углы при четвертой вершине — либо все острые, либо все тупые, либо все прямые, а двугранные углы при остальных вершинах — острые.

6. Если EF — общий перпендикуляр ребер AD и BC ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ ($E \in AD$, $F \in BC$), то

$$EF^2 = \vec{AE} \cdot \vec{ED} + \vec{BF} \cdot \vec{FC}.$$

ОПИСАННЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничивают так называемый *описанный параллелепипед тетраэдра* (рис. 6). Некоторые свойства тетраэдра становятся более наглядными, если переформулировать их для параллелепипеда. Например, каждое из определений ОЗ, О4, О5 ортоцентрического тетраэдра равносильно тому, что

О8. Ребра описанного параллелепипеда равны, т.е. все его грани — ромбы. (Для доказательства надо только заметить, что ребра тетраэдра — это диагонали граней параллелепипеда, а бимедианы тетраэдра равны и параллельны ребрам параллелепипеда, — рис. 6.) Условие же равенства всех граней

описанного параллелепипеда (а тем самым и его ребер) характеризует правильные треугольные пирамиды. Еще один вид тетраэдров — *равногранные* — можно определить так: их описанные параллелепипеды — прямоугольные. Кстати, сейчас мы сможем дать отрицательный ответ на вопрос, поставленный в конце первого раздела: тетраэдр, бивысоты которого пересекаются в одной точке, не обязательно ортоцентрический. Равногранный тетраэдр тоже обладает этим свойством, поскольку бивысоты равногранного тетраэдра совпадают с бимедианами и пересекаются в центре его описанного параллелепипеда. Еще один пример можно получить из прямого параллелепипеда, в основании которого ромб, — у соответствующего тетраэдра два противоположных ребра перпендикулярны, а остальные равны.

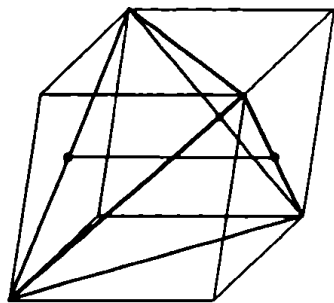


Рис.6

Другие примеры тетраэдров, у которых бивысоты пересекались бы в одной точке, нам не известны. Также неизвестно, есть ли какие-либо общие условия, при которых это свойство выполняется. Возможно, их найдут читатели.

Докажите, что

7. Между элементами тетраэдра и элементами его описанного параллелепипеда имеются следующие соотношения:

- а) высоты параллелепипеда равны бивысотам тетраэдра,
- б) объем параллелепипеда втрое больше объема тетраэдра,
- в) диагонали параллелепипеда пересекают грани тетраэдра в их центрах тяжести и делятся ими в отношении 2:1, считая от конца, совпадающего с вершиной тетраэдра;

8. Если $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, H — его ортоцентр, O и R — центр и радиус описанной около этого тетраэдра сферы, m — длина бимедианы, то:

а) перпендикуляр, опущенный на грань BCD из вершины описанного параллелепипеда, противоположной A , проходит через O ;

б) точки O и H симметричны относительно центра тяжести тетраэдра;

в) $OH^2 = 4R^2 - 3m^2$;

г) середины ребер и основания бивысот тетраэдра лежат на одной сфере;

д) центры тяжести и ортоцентры граней лежат на одной сфере.

ИНЦЕНТРИЧЕСКИЕ ТЕТРАЭДРЫ

Отрезки, соединяющие центры тяжести граней тетраэдра с противоположными вершинами («медианы тетраэдра»), всегда пересекаются в одной точке (эта точка — центр тяжести тетраэдра). Если в этом условии заменить *центры тяжести* граней на *ортоцентры* граней, то оно превратится в новое определение ортоцентрического тетраэдра (проверьте!). Если же заменить их на *центры вписанных в грани окружностей*, называемые иногда *инцентрами*, мы получим определение нового класса так называемых *инцентрических тетраэдров*.

Признаки класса инцентрических тетраэдров тоже довольно интересны:

И1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке.

И2. Биссектрисы углов двух граней, проведенные к общему ребру этих граней, имеют общее основание.

И3. Произведения длин противоположных ребер равны.

И4. Треугольник, образованный вторыми точками пересечения трех ребер, выходящих из одной вершины, с любой сферой, проходящей через три конца этих ребер, является равносторонним (рис. 7).

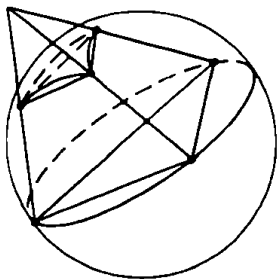


Рис. 7

Проверка эквивалентности этих условий не сложна, и мы оставляем ее читателям, ограничившись только одним указанием: для любого тетраэдра стороны треугольника, о котором говорится в условии *И4*, пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра.

Докажите еще два свойства инцентрических тетраэдров и выясните, можно ли принять их за определения этого класса:

9. Косинус угла между одной парой противоположных ребер тетраэдра равен сумме косинусов двух углов между двумя другими парами его противоположных ребер.

10. Прямые, по которым плоскости трех граней тетраэдра пересекаются с плоскостью, касающейся его описанной сферы в общей вершине этих граней, образуют друг с другом углы по 60° .

СОРАЗМЕРНЫЕ ТЕТРАЭДРЫ

Последний класс тетраэдров, с которым мы хотим познакомить читателей, — это класс *соразмерных тетраэдров*. Соразмерными мы называем тетраэдры, у которых

C1. Бивысоты равны.

Это определение можно заменить любым из следующих:

C2. Проекция тетраэдра на плоскость, перпендикулярную любой бимедиане, есть ромб.

C3. Грани описанного параллелепипеда равновелики.

$$C4. 4a_1^2d_1^2 - (b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)^2 = 4b^2b_1^2 - (c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2)^2 = 4c^2c_1^2 - (a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2)^2,$$

где a и a_1 , b и b_1 , c и c_1 — длины противоположных ребер.

Для доказательства эквивалентности определений C1 — C4 достаточно заметить, что бивысоты тетраэдра равны высотам параллелограмма, являющегося его проекцией, упоминавшейся в C2, и высотам описанного параллелепипеда и что квадрат площади грани параллелепипеда, содержащей, скажем, ребро c , равен $(c^2c_1^2 - (\bar{c} \cdot \bar{c}_1)^2)/4$, а скалярное произведение $\bar{c} \cdot \bar{c}_1$ выражается через ребра тетраэдра по формуле (4).

Добавим сюда еще два легко доказываемых условия соразмерности:

C5. Для каждой пары противоположных ребер тетраэдра плоскости, проведенные через одно из них и середину второго, перпендикулярны.

C6. В описанный параллелепипед соразмерного тетраэдра можно вписать сферу.

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КЛАССОВ. ПРАВИЛЬНЫЕ ПИРАМИДЫ

Мы рассмотрели три класса тетраэдров. Про каждый из них можно сказать, что он определяется *двумя* равенствами (см. O5, ИЗ, C4). Также двумя равенствами ($a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$) определяются упомянутые в начале статьи каркасные тетраэдры. Равногранные же тетраэдры определяются *тремя* равенствами ($a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$), а хорошо знакомые всем правильные треугольные пирамиды определяются *четырьмя* равенствами ($a = b = c$, $a_1 = b_1 = c_1$). У правильного тетраэдра все ребра равны — *пять* равенств. Можно ли получить какие-то новые виды тетраэдров, пересекая названные классы? К сожалению, нет.

Докажите, что

11. Равногранные тетраэдры в пересечении с любым другим классом дают правильные тетраэдры, а пересечение любого набора из остальных шести классов — правильные пирамиды.

12. Каждое из следующих условий, за исключением одного (какого?) определяет правильную пирамиду:

1) $AB = BC = CA$, $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$

(здесь треугольник ABC — основание, точка D — вершина пирамиды).

- 2) существует сфера, касающаяся сторон основания в их серединах и проходящая через середины боковых ребер;
- существует сфера, касающаяся боковых граней в их
- 3) центрах тяжести,
- 4) центрах вписанных окружностей,
- 5) центрах описанных окружностей,
- 6) ортоцентрах.

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ

Для тех, кто готовится к поступлению в вуз, мы предлагаем несколько задач приемных экзаменов разных лет на механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ (формулировки незначительно изменены). Все эти задачи прямо или косвенно связаны с темой нашей статьи.

13. В тетраэдре $SABC$ известны плоские углы при вершине S : $\angle BSC = 90^\circ$, $\angle ASC = \angle ASB = 60^\circ$. Вершины A , S и середины ребер SB , SC , AB , AC лежат на сфере радиусом 3. Докажите, что ребро SA — ее диаметр и найдите объем тетраэдра.

14. В тетраэдре $SABC$ середины всех ребер лежат на сфере радиусом 2, $AB = 3$, $AC = 4$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC . Найдите объем пирамиды.

15. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD перпендикулярны, а ребра AC и BD перпендикулярны и равны между собой. Все ребра касаются некоторого шара. Найдите его радиус, если $BC = a$.

16. В пирамиде $SABC$ произведения длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина угла между ребром SA и основанием ABC равна $\arcsin 4/\sqrt{21}$, а расстояние между ребрами SA и AB равно 1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что она не менее 4, а $3SA^2 + SC^2 = 3SB^2$.

17. В пирамиде $SABC$ площадь грани ASB равна $3\sqrt{7}/4$, угол BCS равен $\arctg\sqrt{231}/37$, $AS = SB$ и $SC \cdot AC = 20$. Известно, что перпендикулярны к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найдите объем пирамиды.

Во многих стереометрических задачах часто приходится определять угол между прямой и плоскостью. Это удобно делать с помощью *теоремы о трех синусах*, которую вы узнаете, если решите следующую задачу.

Задача 1. В одной из граней двугранного угла величиной α проведена прямая, составляющая с ребром этого угла угол β . Определите угол, который эта прямая образует с другой гранью.

Решение. Пусть $\angle ABC$ — линейный угол данного двугранного угла, равный α (рис. 1) и пусть $\angle ADB = \beta$. Опустим перпендикуляр AC на другую грань угла; тогда $\angle ADC$ — искомый. Обозначим $\angle ADC$ через γ и положим $AD = x$. Треугольник ABD — прямоугольный, поэтому $AB = x \sin \beta$. Треугольник ABC тоже прямоугольный, поэтому $AC = AB \sin \alpha = x \sin \alpha \sin \beta$. Наконец, из треугольника ADC находим, что $AC = x \sin \gamma$. Итак,

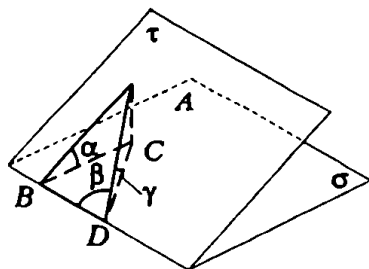


Рис. 1

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Это и есть теорема о трех синусах, которой посвящена эта статья. Вот как она применяется в решении задач.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основание равно высоте. Найдите угол между диагональю AB_1 и плоскостью AA_1C_1C .

Решение. Двугранный угол при ребре AA_1 равен $\frac{\pi}{3}$ (рис. 2). Диагональ AB_1 составляет с ребром AA_1 угол, равный $\frac{\pi}{4}$. Пусть

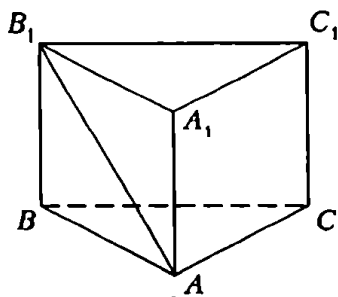


Рис.2

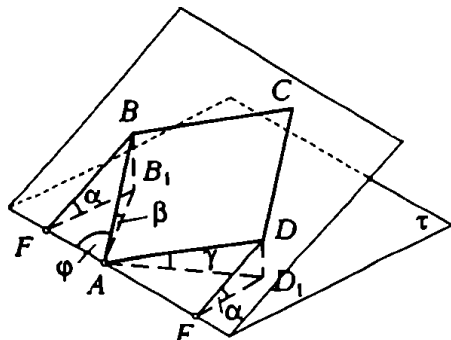


Рис.3

γ — величина искомого угла. Тогда по теореме о трех синусах

$$\sin \gamma = \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Итак, $\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Вот задача посложнее.

Задача 3. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ и некоторой плоскостью τ равен α , а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β . Найдите угол между стороной AD и плоскостью τ .

Решение. Будем считать, что вершина A квадрата лежит на ребре рассматриваемого двугранного угла — см. рисунок 3. Углы BFB_1 и DED_1 — линейные углы этого двугранного угла: $\angle BFB_1 = \angle DED_1 = \alpha$. Отрезки AB_1 и AD_1 — проекции сторон AB и AD на плоскость τ . Согласно условию, $\angle BAB_1 = \beta$.

Пусть $\angle BAF = \varphi$ и $\angle DAD_1 = \gamma$. По теореме о трех синусах $\sin \beta = \sin \alpha \sin \varphi$, откуда $\sin \varphi = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\angle DAE = 90^\circ - \varphi$. Поэтому из теоремы о трех синусах следует

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sin(90^\circ - \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi = \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

Итак,

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

Задача 5. Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла φ . Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол α . Найдите величину угла между плоскостью ABC и гранью Q .

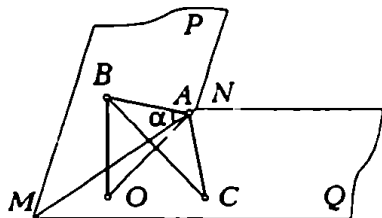


Рис.4

Решение. Сделаем чертеж — рисунок 4. Вершина A равностороннего треугольника принадлежит ребру MN , стороны AB и AC лежат в гранях P и Q ; согласно условию, $\angle BAM = \alpha$. Проведем $BO \perp Q$ и соединим точки O и A . Обозначим $\angle BAO$ через φ , а через ω обозначим искомый угол, который плоскость ABC образует с Q .

Применив дважды теорему о трех синусах, получаем

$$\sin \gamma = \sin \varphi \sin \alpha$$

и

$$\sin \gamma = \sin \omega \sin \frac{\pi}{3}.$$

Итак,

$$\sin \omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \sin \alpha,$$

и

$$\omega = \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \sin \alpha \right).$$

Надеюсь, что теорема о трех синусах окажется полезной вам при подготовке к вступительным экзаменам. В заключение — еще несколько задач.

Упражнения

1. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника наклонен к плоскости α , проходящей через гипотенузу, под углом 30° . Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью треугольника равен 45° .

2. Сторона AB ромба $ABCD$ с тупым углом 120° лежит в некоторой плоскости τ , составляющей с плоскостью ромба угол 45° . Площадь ромба равна $72 - \sqrt{3}$. Определите расстояние от стороны CD до плоскости τ и угол, который составляет большая диагональ ромба с этой же плоскостью.

3. Прямая AB параллельна плоскости τ . Прямая CD пересекает прямую AB под углом α и образует с плоскостью τ угол φ . Определите угол между плоскостью τ и плоскостью, в которой лежат прямые AB и CD .

4. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол α . Какие углы эта плоскость составляет с катетами треугольника?

5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и образует с боковой гранью угол α .

На приемных экзаменах в институтах часто встречаются задачи, в которых речь идет о некотором расположении сферы (или нескольких сфер) относительно пирамиды. Решения таких задач основаны, по существу, на следующих трех фактах:

1) *если плоскость (или прямая) касается сферы, то расстояние от центра сферы до этой плоскости (или прямой) равно радиусу сферы;*

2) *если сфера касается двух пересекающихся плоскостей, то центр сферы лежит в биссекторной плоскости двугранного угла, образованного этими плоскостями;*

3) *если пирамида описана вокруг сферы, то*

$$V = \frac{1}{3} rS, \quad (1)$$

где r — радиус сферы, V и S — объем и полная поверхность пирамиды.

Эти факты известны каждому абитуриенту из школьного курса математики. Но в математике мало просто знать формулировки теорем — важно понимать эти теоремы и уметь применять их для решения задач.

Как правило, задачи, предлагаемые на вступительных экзаменах, формулируются просто, и большинство абитуриентов достаточно быстро находят какой-нибудь путь к решению. Но часто выбранный способ оказывается очень сложным и громоздким, требует длинных выкладок. Таким «формально-вычислительным» методом иногда очень трудно получить окончательный результат. Для каждой задачи нужно постараться найти как можно более короткое и «изящное» решение.

Иногда и на устном экзамене абитуриенту предлагают не решить задачу, а лишь указать путь решения, проверяя тем

самым, насколько абитуриент ориентируется в данном разделе теории.

В этой статье мы и рассмотрим задачи, в которых использование несложных геометрических соображений помогает найти простое и красивое решение.

Задача 1. *Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая сфера касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найдите радиус этих сфер.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, O — центр вписанной в него сферы, r — радиус этой сферы; M, N, K, L — центры данных сфер, их радиус мы обозначим через x .

Тетраэдр $MNKL$ — правильный, так как каждое его ребро равно $2x$. Грани тетраэдра $MNKL$ параллельны граням тетраэдра $ABCD$ (докажите!), а точка O удалена от каждой грани тетраэдра $MNKL$ на расстояние $r - x$. Следовательно, точка O является центром сферы, вписанной в тетраэдр $MNKL$, и радиус этой сферы равен $r - x$.

Используя выражения для объема и полной поверхности правильного тетраэдра через его ребро, по формуле (1) находим

$$r = \frac{a}{2\sqrt{6}}, \quad r - x = \frac{x}{\sqrt{6}}, \quad x = \frac{r\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = \frac{a}{2(1 + \sqrt{6})}.$$

Задача 2. *Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . Найдите радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A , и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD и BC .*

Решение. Заметим, что искомый радиус r равен радиусу любой сферы, касающейся граней ABC, ACD и данной секущей плоскости (рис. 1), потому что $DH = HC$, $AC \parallel EF \parallel GH$, и надо лишь вписать сферу в призму, а затем пододвинуть ее к плоскости ABD . Расположим центр одной из таких сфер в плоскости, проходящей через ребро BD и перпендикулярной к ребру AC . Радиус этой сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник MNK , у которого

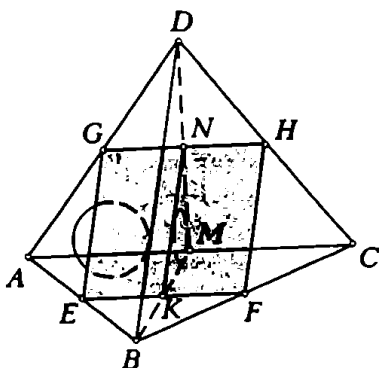


Рис. 1

$$KN = \frac{a}{2}, \quad MN = KM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Используя выражение для радиуса вписанной в треугольник окружности через его площадь и полупериметр, находим

$$r = \frac{2S_{\Delta MNK}}{KN + 2MN} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4\sqrt{2}}.$$

Задача 3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро пирамиды равно b . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Решение. Пусть SK — высота данной пирамиды (рис. 2), O — центр сферы, $OM \perp BS$, $OM = OD = r$.

Заметим, что $BM = BD = a/2$, как две касательные к сфере, проведенные из точки B . Из подобия треугольников SOM и SBK находим

$$r = \frac{SM \cdot BK}{SK} = \frac{\left(b - \frac{a}{2}\right) \frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}} = \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

Задача 4. В данную правильную усеченную треугольную пирамиду с боковым ребром b можно поместить сферу, касающуюся всех граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Найдите стороны основания пирамиды.

Решение. Пусть P и P_1 — центры оснований данной усеченной пирамиды, DD_1 — ее апофема (рис. 3). Обозначим стороны оснований через x и y . Из трапеции AA_1D_1D находим

$$DD_1^2 = b^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2.$$

Сфера, вписанная в пирамиду, касается оснований пирамиды в точках P , P_1 и касается апофемы DD_1 (докажите!).

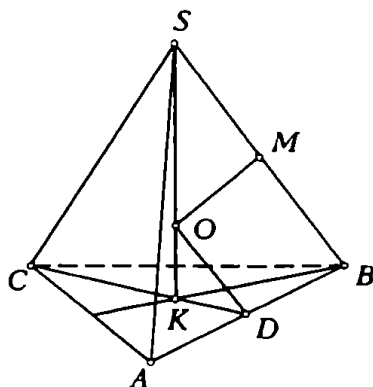


Рис. 2

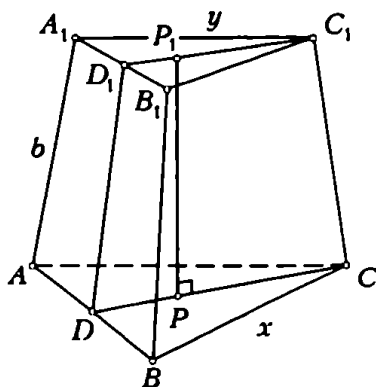


Рис. 3

Следовательно,

$$DD_1 = PD + P_1D_1 = \frac{x+y}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$b^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = \frac{1}{12}(x+y)^2. \quad (2)$$

В сечении сферы, касающейся всех ребер пирамиды, гранью BB_1C_1C получается окружность, вписанная в трапецию BB_1C_1C . Значит, $BC + B_1C_1 = BB_1 + CC_1$,

$$x + y = 2b. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и (3), находим

$$x = b\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad y = b\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Задача 5. Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найдите радиус сферы.

Решение. Пусть O — центр сферы, описанной около пирамиды $SABCD$ (рис.4), $OS = OA = R$ — радиус этой сферы, SK — высота пирамиды. Проведем $SL \perp BC$, $OM \perp SL$, $ON \perp AS$. По условию задачи $OM = a$, $ON = b$ (докажите!).

Так как $\triangle SOM \sim \triangle SKL$ и $\triangle SON \sim \triangle ASK$, то

$$\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{KL}{SK},$$

$$\frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{AK}{SK} = \frac{\sqrt{2}KL}{SK}.$$

Отсюда находим

$$\frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - a^2}},$$

$$R = \frac{ab}{\sqrt{2a^2 - b^2}}.$$

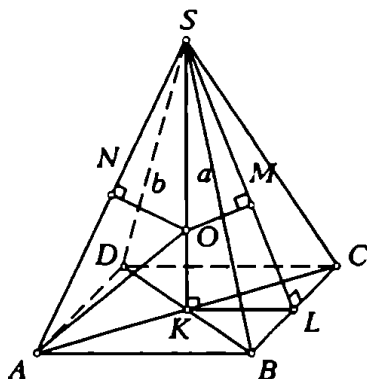


Рис.4

Задача 6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна b , а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается грани ACD в точке K . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB .

Решение. Пусть DO — высота пирамиды (рис.5). Точка K лежит на высоте DL треугольника ACD (докажите!). Сечением пирамиды данной плоскостью является равнобедренный треугольник ABM (докажите!). Найдём его боковую сторону AM .

Обозначим $\angle CAM$ через α , $\angle ACM$ через β . Заметим, что

$LK = LO = b/(2\sqrt{3})$ как две касательные к вписанной в пирамиду сфере, проведённые из точки L (докажите!). Значит,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KL}{AL} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Из прямоугольного треугольника ODL находим

$$DL = \sqrt{OD^2 + OL^2} = \frac{5b}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{CL}{DL} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Теперь из треугольника ACM по теореме синусов получаем

$$AM = \frac{b \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{b}{\sin \alpha \operatorname{ctg} \beta + \cos \alpha} = \frac{5b}{3\sqrt{3}}.$$

Наконец, находим площадь равнобедренного треугольника ABM :

$$S = \frac{1}{2} AB \sqrt{AM^2 - \frac{1}{4} AB^2} = \frac{\sqrt{219}}{36} b^2.$$

Задача 7. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . На ребрах AB и CD расположены соответственно точки E и F . Прямая EF пересекает описанную около тетраэдра сферу в точках M и N так, что $ME : EF : FN = 3 : 12 : 4$. Найдите длину EF .

Решение. Обозначим EF через x , FC через y , BE через z (рис. 6). Найдём соотношение между x , y , z и a .

Из точки F опустим перпендикуляр FL на плоскость треугольника ABC . Так как тетраэдр правильный, то точка L лежит на высоте CK треугольника ABC .

Из прямоугольного треугольника CFL , учитывая, что $\angle KCD = \arccos 1/\sqrt{3}$ (проверьте!), находим

$$CL = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad FL = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Так как $KL = KC - CL = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{\sqrt{3}}$, а $KE = \left| \frac{a}{2} - z \right|$, то из

прямоугольного треугольника KLE получаем $EL^2 = KL^2 + KE^2 = a^2 + \frac{1}{3}y^2 + z^2 - ay - az$.

Теперь из прямоугольного треугольника EFL находим $EF^2 = FL^2 + EL^2$, т.е.

$$x^2 = a^2 - y(a - y) - z(a - z). \quad (4)$$

Последнее соотношение само по себе достаточно интересно и может быть использовано при решении других задач.

Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые EF и CD . Эта плоскость пересекает описанную около тетраэдра сферу по окружности, которая указана на рисунке 6. Для этой окружности отрезки MN и CD являются хордами, пересекающимися в точке F . Следовательно, $CF \cdot DF = MF \cdot NF$ (докажите!), т.е.

$$y(a - y) = \frac{5}{12}x^2. \quad (5)$$

Аналогично, из равенства $AE \cdot BE = ME \cdot NE$ получаем

$$z(a - z) = \frac{1}{3}x^2. \quad (6)$$

Из соотношений (4), (5) и (6) находим

$$x^2 = a^2 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{1}{3}x^2, \quad x = \frac{2a}{\sqrt{7}}.$$

Упражнения

1. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . На ребре AD как на диаметре построена сфера. Найдите радиус сферы, вписанной в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающейся построенной сферы.

2. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены две сферы с радиусами $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем одна сфера вписана в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A , а другая — в трехгранный угол с вершиной в точке B . Найдите длину ребра этого тетраэдра.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна a , высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Точки M , N и K являются серединами соответственно боковых ребер AS , BS и CS . Найдите радиус сферы, касающейся основания пирамиды и прямых AK , CN и BM .

4. В правильной шестиугольной пирамиде вписанная сфера проходит через центр описанной. Во сколько раз радиус описанной сферы больше радиуса вписанной?

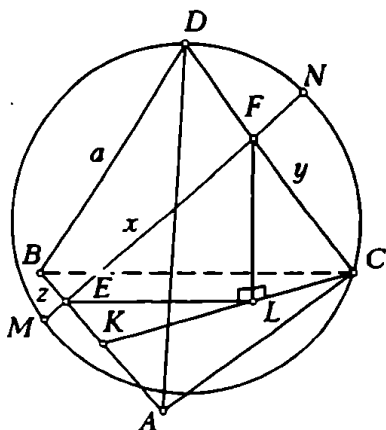


Рис. 6

5. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, находится на расстоянии $\sqrt{2}$ от бокового ребра и на расстоянии $\sqrt{5}$ от стороны основания. Найдите радиус шара.

6. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B , середину ребра CD и центр грани ABC .

7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна b , а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в эту пирамиду, касается боковой грани SAD в точке K . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и ребро AB .

«Ключ» к решению — подобные треугольники

1. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. 2. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники, отсекаемые касательными, относятся к R , как периметры этих треугольников к периметру $\triangle ABC$.
 3. 4π . 4. $\sqrt{c^2 + bc}$.

Простой ответ в «сложной» задаче

1. Точка E такова, что $BE = \sqrt{a^2 - b^2}$. 3. $h = a\sqrt{\frac{b}{a+b}}$. 4. $AC = \sqrt{ab}$.
 5. $BC = a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}$. 6. $BM = R \operatorname{cosec}\left(\arcsin \frac{24}{25}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25}\right)\right) = \frac{5}{24} R$.
 7. $DM = \sqrt{AM^2 + BM^2 - CM^2} = 7$. 8. $\angle AMK = \operatorname{arccotg}(\cos \alpha)$.

Теорема Менелая

1. $MS : SC = 4 : 3$, $SN : BS = 1 : 6$. 2. $1 : 3$, считая от точки D .
 3. $3 : 11$, считая от точки D . 4. *Указание.* Примените теорему Менелая к треугольнику BB_1C и прямой AA_1 .
 5. $a\sqrt{7}/12$. 6. $\frac{p(q+1)}{pq+q+1}$. 7. $5/12$. 8. $3/7$.

Геометрические решения экстремальных геометрических задач

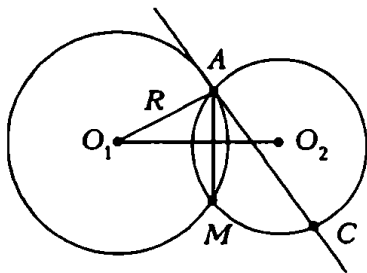
1. $8\sqrt{13}/3$, $4\sqrt{73}/3$. 3. $(3/2; 0)$. 4. $(a-b)^3/(16(a+b))$. 5. $27\sqrt{3}/32$.
 6. $27/8$. 7. $4\sqrt{3}/27$. 8. $\arccos 1/3$.

Метод решения задачи «с конца»

8. Неверно. Внесите необходимые изменения и докажите полученную теорему. 9. Следует еще указать на обратимость всех преобразований.
 10. Нет.

Правильное решение геометрической задачи

1. Возможно любое число решений от 0 до 6. 2. Если $AC < AB$, то искомая сумма расстояний будет наименьшей, когда прямая l совпадает



с прямой AB . Если $AC = AB$, то наименьшее значение достигается для двух прямых: AC и AB . 3. См. рисунок. Если $O_1O_2 > R$, то AM — искомая прямая; если $O_1O_2 < R$, то AC — искомая прямая; если $O_1O_2 = R$, то обе прямые AM и AC удовлетворяют условию задачи.

Задача 4. Решение верно лишь в том случае, если угол A острый. Если $\angle A = 90^\circ$, длина медианы равна $\frac{1}{2}BC$ и не

зависит от формы треугольника. Если $\angle A > 90^\circ$, решения не существует.

Задача 5. Результат верен лишь при $\angle A = 90^\circ$, т.е. при $AH \geq \frac{1}{2}BC$. Если $AH < \frac{1}{2}BC$, искомый треугольник прямоугольный с гипотенузой BC .

Задача 6. 45° или 135° . В решении не рассмотрен случай, когда точка пересечения высот расположена вне треугольника.

Задача 7. 900 и 780. В решении не рассмотрен случай, когда угол $CB'A$ тупой.

Вооружившись методом координат

1. $\frac{11}{\sqrt{170}}$. 2. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 3. $3\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$. 4. $\frac{7}{\sqrt{3}}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$. 5. $a\sqrt{2}$.
6. $\frac{1}{5}\sqrt{1345}$. 7. $\arccos \frac{6}{7}$.

Скалярное умножение векторов

1. 1) $\frac{a^3}{2}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 2. 1) 2; 2) $\frac{2a}{\sqrt{30}}$. 3. $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$.
4. $BD = \frac{1}{5}\sqrt{9a^2 + 4b^2 + 25c^2 - 12ab\cos\alpha}$, $BC = \frac{1}{5}\sqrt{9a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 18ab\cos\alpha}$.
5. $\frac{4}{9}a^3$.

Чертеж в геометрической задаче

1. Указание. Рассмотрите отдельно случаи, когда точка D лежит внутри или вне треугольника ABC ; воспользуйтесь теоремой о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. $a\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})/2$. 3. $R|\cos 2\varphi|$; $\frac{4}{3}R^3 \sin^2 2\varphi \sin \varphi \sin \alpha$.

Указание. Вычисления проводятся по-разному в зависимости от того, лежит ли центр описанного шара внутри пирамиды или вне ее.

4. 6/5. Указание. Рассмотрите два случая: указанные в условии задачи прямые пересекают стороны параллелограмма или их продолжения. Убедитесь, что в первом случае чертеж не соответствует условию задачи.

5. Условию задачи удовлетворяют три шара с радиусами $r_1 = 1$ (внутреннее касание), $r_{2,3} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ (внешнее касание).

6. $-4h^3 \sin^3 \frac{\alpha}{4} / \left(3 \cos \frac{3\alpha}{4} \right)$. 7. $\frac{1}{4} a \operatorname{tg} \alpha$; $\frac{1}{4} a \operatorname{ctg} \alpha$. 8. $\sqrt{7}/4$. 9. $(8\sqrt{3} + 12)/3$.

10. $(\alpha + \beta)/2$.

Основные углы в правильной пирамиде

1. $\frac{a^2}{\sqrt{-\cos \alpha}}$. 2. $\frac{a^3}{24} \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}$. 3. $\pi - \arccos(\sqrt{21}/4)$.

4. $v\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} / (6\sqrt{\cos \alpha})$. 5. $\frac{4}{3} l^3 \operatorname{tg} \alpha / (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}$. 6. $\sqrt[3]{\frac{12Q}{\pi \cos \frac{\alpha}{2}}} \sqrt{-2\cos \alpha}$.

7. $\frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{24 \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}$, $\frac{3a^2}{8 \sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}$.

8. $\sqrt{S \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) / \left(2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)}$. 9. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}$, $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

10. $\frac{na^3 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt[3]{-\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}}$.

Вычисление расстояний и углов

1. 4. 2. $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$. 3. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$, $\frac{a^3 \sqrt{15}}{4}$. 4. $\frac{3\sqrt{3}}{256} a^3$. 5. а) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Из геометрии тетраэдра

13. $18\sqrt{2}$. 14. $4\sqrt{39}$. 15. $a/(2\sqrt{2})$. 16. $2\sqrt{14}$. 17. $\sqrt{87}/4$.

Теорема о трех синусах

2. $3\sqrt{6}$; $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$. 3. $\arcsin(\sin \varphi / \sin \alpha)$. 4. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)$.

5. $\frac{a^3 \sin \alpha}{24 \sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}}$.

Пирамида и сфера

1. $\frac{a}{8}(\sqrt{6} \pm 1)$. 2. $(5\sqrt{6} + \sqrt{22})R$. 3. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 4. $1 + \sqrt{\frac{7}{3}}$. 5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 6. $\frac{3\sqrt{6}}{8} a$.

7. $\frac{3\sqrt{17}}{16} b^2$.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

ВЫПУСК 2

Редактор *А. Ю. Котова*
Литературный редактор *Л. В. Кардасевич*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Компьютерная группа
М. Н. Грицук, Е. А. Митченко, Е. В. Титова

ИБ № 18

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.
Заказ **2321** .

117296 Москва, Ленинский пр., 64а
«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Тел. (272) 71-336, факс (272) 62-536